Fields and Waves in Layered Media

分层介质中的电磁场和电磁波

李 凯 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

Fields and Waves in Layered Media

ISBN 978-7-308-05872-8



定价：26.00元

分层介质中的电磁场和电磁波

李 凯 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容简介

本书是一本系统阐述分层介质中电磁场和电磁波的专著，内容主要包括平面分层介质中电偶极子激励的电磁场近似解、低频电磁波绕覆盖介质层的球形地面传播的近似解以及两层介质分界面附近的瞬态场的严格解和近似解。本书的突出特点为在平面及球面分层模型下求解电磁场和电磁波的解析解，而对广泛使用的电磁场的数值方法则很少涉及。

本书可供从事无线电波传播的研究人员、电磁理论和应用的研究人员，以及高等院校无线电物理和电磁场理论与微波技术专业的师生使用。

图书在版编目(CIP)数据

分层介质中的电磁场和电磁波 / 李凯著. —杭州：浙江大学出版社，2010.1
ISBN 978-7-308-05872-8

Ⅰ.分… Ⅱ.李… Ⅲ.①电磁场—研究②电磁波—研究
Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 043389 号

分层介质中的电磁场和电磁波
李 凯 著

责任编辑 应伯根
文字编辑 王元新
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州求是图文制作有限公司
印　　刷 富阳市育才印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 13
字　　数 277 千字
版 印 次 2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-05872-8
定　　价 26.00 元

前　言

分层介质中电磁场和电磁波的理论在短波通信、对潜通信、地波超视距雷达、地球物理探测、遥感、微带天线设计等领域都有广泛的应用。因此，分层介质中场和波的研究已成为电磁理论和应用中最活跃、发展速度最快的研究领域之一。

对于平面分层介质、柱面分层介质和球面分层介质中的电磁场与电磁波的问题，很多可以用解析方法求解。近十年来，作者一直专注于分层介质中电磁场与电磁波的研究，并已经与导师、合作者和学生们一起在此领域做了许多具有自己特色的理论研究，其中大部分研究成果已在国内外有关期刊上公开发表。在单位领导和同事的支持与鼓励下，作者系统地总结了近年来我们在此领域内的研究成果，在学术前辈陈抗生教授的建议下撰写了这部专著。其中大部分内容是作者和合作者及所指导的研究生的共同成果，为了使本书内容有较好的系统性，也引用了一些国内外学者的研究成果。

在理论研究方法上，追求获得具有明确的物理意义、简单、同时又能够得到足够精度的解析表达式，而不是使用纯粹的数值解。首先，将实际的电磁场和电磁波问题进行合理的简化，建立一个理想化的物理模型，把一个实际问题转化为寻找一个满足特定边界条件的麦克斯韦方程组的数学问题；然后，灵活地应用数学物理方法范畴内的各种数学工具，获得最终的解析表达式并计算出相应的数值结果。

本书大部分的研究工作是在 Banōs 的专著 *Dipole Radiation in the Presence of Conducting Half-Space*(1966)、Wait 的专著 *Electromagnetic Waves in Stratified Media*(1970)、King 等人的专著 *Lateral Electromagnetic Waves*(1992)和潘威炎的专著《长波超长波极长波传播》(2004)

的基础上开展的，主要的研究成果也是最近几年取得的。因此，内容较新颖，代表着作者在此研究领域内的最新研究成果。

本书的研究内容主要包括平面分层介质中电偶极子激励的电磁场分量的近似解、低频电磁波绕覆盖介质层的球形地面传播的近似解以及两层介质分界面附近的瞬态场分量的严格解和近似解。

作者希望本书能够对无线电波传播研究人员、电磁理论和应用研究人员，以及高等院校无线电物理专业和电磁场理论与微波技术专业的师生们能有所裨益。

这里，我衷心地感谢我的导师潘威炎研究员，是潘老师将我引入了科学殿堂。潘老师渊博的学识、严谨的治学态度，以及无私奉献和不断进取的精神永远是我学习的榜样和追求的目标。我衷心感谢合作研究多年的中国电波传播研究所的张红旗研究员，本书部分内容即是和潘老师及张红旗研究员的一些合作成果。感谢韩国情报通信大学的 S. O. Park 教授以及新加坡南洋理工大学的陆忆陇教授，本书部分内容即为与他们的合作成果。感谢美国麻省理工学院孔金瓯教授(已故)、浙江大学陈抗生教授、章献民教授、何赛灵教授、尹文言教授和杨冬晓教授、浙江大学国际电磁科学院浙大分院蒋芹老师四年多来的关心和支持。感谢我的同事和朋友杜阳副教授、王浩刚副教授、李中新副教授、张中庆研究员的帮助和友谊。感谢王寅林、陆云龙、柳良等研究生为本书出版付出的辛勤劳动。感谢浙江大学出版社对我工作上的关心与支持。

本书得到国家自然科学基金面上项目(60971057、60872091)和重点项目(60831002)以及毫米波国家重点实验室开放课题(K201010)资助。

本书虽然酝酿时间长，但由于作者水平所限，遗漏及错误之处恐难避免，望乞批评指正。

李　凯

2009 年 7 月于杭州

目 录

第 1 章

电磁理论预备知识

分层介质中的电磁场和电磁波是宏观电磁场理论中的一个重要分支，它的理论基础是经典的电磁场基本定律及反映这些基本定律的麦克斯韦方程组。为了深入研究分层介质中的电磁场和电磁波，以及方便读者阅读，本章对电磁理论的一些预备知识作一简单回顾。

1.1 库仑定律和电场强度

1785 年，库仑由实验得出：在真空中，两个点电荷间相互作用力与两电荷电量的乘积成正比，与电荷间距离的平方成反比，力的方向沿电荷间的连线，并以同性相斥、异性相吸取向。库仑定律的数学表达式可表示为

$$\boldsymbol{F}_{12}=\boldsymbol{e}_R\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{R} \tag{1-1}$$

式中：$\varepsilon_0=(36\pi)^{-1}\times10^{-9}$ F/m 称为真空或自由空间的介电系数。实验表明，任何电荷都在自己周围空间产生电场，电荷之间的相互作用力是通过电场传递的。这是电场的特性。用试验电荷 q_1 在电场中所受的力来定义静电场的电场强度，可表示为

$$\boldsymbol{E}=\lim_{q_2\to0}\frac{\boldsymbol{F}}{q_2}=\frac{q_1}{r\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{R}=\frac{q_1}{r\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{1-2}$$

式中：电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的单位是 V/m。对线性介质中的线性支配方程可用叠加原理。对于由 N 个点电荷产生的电场，场点 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度等于各个点电荷单独产生的电场强度的矢量和，即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{r\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i'|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i') \tag{1-3}$$

对于电荷分别以体密度、面密度和线密度连续分布的带电体，可得如下公式：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho_V(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \tag{1-4}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'} \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho_S(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{1-5}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'} \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho_L(z')\mathrm{d}z' \tag{1-6}$$

1.2 电位移矢量和高斯定理

电介质对电场的影响可归结为极化电荷产生的附加电场的影响。因此，电介质内的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可视为自由电荷产生的外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 与极化电荷产生的附加电场 $\boldsymbol{E}'$ 的叠加。把单位体积中的电偶极矩的矢量和称为极化强度。对于线性和各向同性电介质，其极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与电介质中的合成电场强度 $\boldsymbol{E}$ 成正比，可表示为

$$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{1-7}$$

式中：χ_e 称为电介质的电极化率，是一个正实数。

引入辅助物理量——电位移矢量 $\boldsymbol{D}$，定义 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$。进一步可以得到沿任意闭合曲面 S 对电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的积分等于该闭合曲面包围的总电荷。若 ρ_V 是该闭合曲面所包围的体积为 V 的体电荷密度，则得到高斯定理的积分形式为

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho_V\,\mathrm{d}V \tag{1-8}$$

其相应的微分形式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1-9}$$

式(1-9)给出了某点电场的散度与该点电荷密度的关系。

1.3 电荷守恒定律和电流连续性方程

定义电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 为单位时间内通过单位横截面积的电荷，它是空间坐标的函数，则通过曲面 $\boldsymbol{S}$ 的总电流强度为

$$I = \int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-10}$$

由最基本的实验定律——电荷守恒定律可知，流出某闭合曲面 $\boldsymbol{S}$ 的电流，就等于 $\boldsymbol{S}$ 所包围的体积 V 中电荷量随时间的变化率。若假定电荷密度为 ρ，可以得到电荷守恒定律的积分形式为

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}V \tag{1-11}$$

其相应的微分形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}+\frac{\partial}{\partial t}\rho=0 \tag{1-12}$$

式(1-12)称为电流的连续性方程。式(1-11)和式(1-12)所表示的电荷守恒定律和电流连续性方程是适用于任意时空变化电荷与电流的普遍定律。

1.4　安培实验定律和磁感应强度

由安培实验结果可知(见图1-1)，在真空中分别载有恒定电流 I_1 与 I_2 的两个闭合电流回路 C_1 和 C_2 之间的相互作用力可表示为

$$\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times[I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)]}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3} \tag{1-13}$$

式中：μ_0 为真空中的磁导率，本书采用国际单位制，则 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H/m}$。

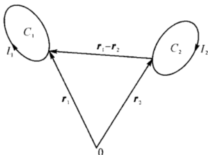


图1-1　电流源引起的作用力示意图

类似于电场相互作用的概念，两电流回路之间的相互作用力是通过磁场传递的。故由式(1-13)可令

$$\boldsymbol{F}_{12}=\oint I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{B}_{12} \tag{1-14}$$

$$\boldsymbol{B}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3} \tag{1-15}$$

式中：$\boldsymbol{B}_{12}$ 即是电流 I_2 在 $\mathrm{d}l_1$ 位置上产生的磁感应强度。若按照一般的习惯采用场点坐标 $\boldsymbol{r}$ 和源点坐标 $\boldsymbol{r}'$，则回路中的线电流 I 产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 可以写成如下的形式：

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{1-16}$$

对于体电流模型和面电流模型，则分别有

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V' \tag{1-17}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'} \frac{\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}S' \tag{1-18}$$

1.5 安培环路定理和磁通连续性原理

由实验观察可知，对静磁场而言，载电流导线周围磁场的力线总是围绕导线的闭合曲线，并且对 $\boldsymbol{B}$ 沿封闭回路的线积分正比于此闭合回路所包围的电流强度，这就是安培环路定理。其积分形式为

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-19}$$

其相应的微分形式为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{1-20}$$

式(1-20)表明，空间某点 $\boldsymbol{B}$ 的旋度只同该点的电流密度有关，因而，在电流密度为零的空间中，磁场总是无旋的。

迄今为止，对磁现象的研究结果表明，世界上没有单独的磁荷存在，磁力线永远构成闭合回路，这就是磁通连续性原理。对于任何闭合曲面而言，穿出或者穿进闭合曲面的净磁通量等于零，即

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1-21}$$

其相应的微分形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-22}$$

可见，磁力线和电力线不同，电力线总是从正电荷出发，终止于负电荷；而磁力线则没有起始。

1.6 磁介质的磁化和磁场强度

介质中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 也可看做是传导电流产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$ 和磁化电流(束缚电流)产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}'$ 的叠加，即

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}' \tag{1-23}$$

这里引入磁化强度，用它来描述磁介质磁化的程度。把单位体积中分子磁矩的矢量和称为磁化强度，可表示为

$$M = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{mi}}{\Delta V} \tag{1-24}$$

式中：p_{mi}表示体积ΔV内第i个分子的磁矩，N为ΔV的分子数。若磁介质的某区域内各点的M相同，则称之为均匀磁化；否则就称为非均匀磁化。

考虑磁化电流的磁效应后，将真空中的安培环路定律延伸至磁介质中，可得到

$$\oint_C \left(\frac{B}{\mu_0} - M\right) \cdot dl = I \tag{1-25}$$

引入包含磁效应的辅助物理量——磁场强度H，即令

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \tag{1-26}$$

式中：磁场强度H的单位为A/m。得

$$\oint H \cdot dl = I \tag{1-27}$$

这是磁介质中安培环路定律的积分形式，它表明磁场强度沿磁介质内任意闭合路径的环量等于与该闭合路径交链的传导电流。从而得到

$$\nabla \times H = J \tag{1-28}$$

这是安培环路定律的微分形式，它表明磁介质内某点的磁场强度H的旋度等于该点的传导电流密度。对于均匀、线性和各向同性磁介质，实验表明磁化强度与磁场强度成正比，可表示为

$$M = \chi_m H \tag{1-29}$$

式中：χ_m称为物质的磁化率。将式(1-29)代入式(1-26)，可得

$$B = \mu H \tag{1-30}$$

这里$\mu = \mu_0(1+\chi_m) = \mu_0\mu_r$，$\mu_r = (1+\chi_m)$称为物质的相对磁导率。在大多数情况下，$\mu_r = 1$。在一般宏观问题中，$\mu$为各向异性的物质很少遇到，但对于铁磁物质，式(1-30)的线性关系不成立，B与H为非线性关系并且不是单值的。

1.7 法拉第电磁感应定律

1831年，法拉第发现了电磁感应现象，这是人们第一次对时变电磁场进行研究。法拉第通过实验发现，当穿过导体回路的磁通量发生变化时，回路中就会出现感应电流。这种电磁感应现象表明回路中存在感应电动势。通过实验可知，感应电动势与穿过此回路的磁通量的时间变化率成正比。其数学表达式为

$$\oint_L E \cdot dl = -\frac{d}{dt}\int_S B \cdot dS \tag{1-31}$$

其相应的微分形式为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-32}$$

由此可见，变化磁场所激发的电场是环绕着磁通量变化的有旋场。

1.8 位移电流的概念

麦克斯韦认为，在时变状态下，高斯定理式(1-9)仍然适用。将其代入电流连续性方程式(1-12)，可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) = 0 \tag{1-33}$$

即

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0 \tag{1-34}$$

这是矢量场中的电流连续性方程。式(1-34)中的后一项是电位移矢量随时间的变化率，它有电流密度的量纲，麦克斯韦将其称为位移电流密度，可表示为

$$\boldsymbol{J}_D = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-35}$$

因此，麦克斯韦假设 $\boldsymbol{J}_D$ 和 $\boldsymbol{J}$ 一样产生磁效应，即随时间变化的电场可以激发磁场，实验证明这是正确的。在将静场有关定律推广到时变电磁场的一般情况下，他把安培定律修正为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \tag{1-36}$$

麦克斯韦由此得到的磁场旋度方程式(1-36)服从电荷守恒定律，是适用于时变电磁场的具有普遍意义的公式，而式(1-20)则是在静场情况下的特例。

1.9 导电物质中的传导电流

在固体及弱电离溶液中(这里不包括电离气体，也不考虑磁场的作用)，传导电流密度与电场存在线性关系，即欧姆定律，可表示为

$$\boldsymbol{J}_\sigma = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1-37}$$

为了确定 σ 的意义，设静电场中截面为 S 的一段圆柱路径 l 上的电位差为

$$U=\int_0^l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^l \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=IR \tag{1-38}$$

式中：$R=\frac{l}{\sigma S}$为此圆柱路径上的电阻，因此$\sigma=\frac{l}{RS}$称为物质的电导率，单位为 S/m。

1.10 麦克斯韦方程组与洛仑兹力公式

1864 年，麦克斯韦在库仑定律、安培定律和法拉第定律的基础上，提出位移电流的概念，并于 1873 年总结概括出了描述宏观电磁场运动规律的完整方程组，人们称之为麦克斯韦方程组。其积分形式表示如下：

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-39}$$

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-40}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V \rho_V \mathrm{d}V \tag{1-41}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{1-42}$$

其相应的场方程微分形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-43}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-44}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1-45}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1-46}$$

积分形式的麦克斯韦方程组反映的是电磁运动在某一局部区域的平均性质，而微分形式的麦克斯韦方程反映的是场在空间每一点的性质，它是积分形式的麦克斯韦方程组当积分区域缩小到一个点的极限。麦克斯韦方程组反映了宏观领域电荷与电流激发电磁场及场本身运动变化的规律，在电荷与电流为零的区域，电磁场可以离开源而独立存在，并通过其本身的相互激发而传播。1887 年，赫兹用实验证实了电磁波的存在。

电荷与电流激发电磁场，反过来电磁场对电荷系统也发生了作用。与麦克斯韦方程组相呼应，基于库仑定律和安培定律，洛仑兹得出了电磁场对电荷系统作用力的公式。假设一个带电量为 q，速度为 $\boldsymbol{v}$ 的带电粒子，在电磁场中受到的力即为洛仑兹力。其方程可表示为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1-47}$$

洛仑兹力方程将电磁学和力学联系在一起。当研究场和电荷相互作用时，洛仑兹力方程是必不可少的。由实验总结推广并经过实践检验的麦克斯韦方程组与洛仑兹力方程，正确地反映了电磁场运动及其与带电体相互作用的规律，是研究宏观电磁现象的理论基础。

1.11 物质中的本构方程

由于麦克斯韦方程组包含 5 个电磁场矢量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{J}$，共计 15 个标量，而麦克斯韦方程组只有式(1-43)和式(1-44)是独立的，即 6 个标量方程，故还需要 9 个标量方程。因而，需要前面提到的由介质特性决定的 3 个方程，即

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{1-48}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{1-49}$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{1-50}$$

方程式(1-48)至式(1-50)称为介质的本构方程，即依赖于介质特性的场矢量关系式。它们作为辅助方程与麦克斯韦方程组一起构成自洽的方程组。如果介质在电场作用下既发生极化又发生磁化，那么介质在磁场作用下也既发生磁化又发生极化。这种介质称为磁电介质，其本构方程为

$$\boldsymbol{D}=\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{E}+\bar{\bar{\xi}}\cdot\boldsymbol{H} \tag{1-51}$$

$$\boldsymbol{B}=\bar{\bar{\zeta}}\cdot\boldsymbol{E}+\bar{\bar{\mu}}\cdot\boldsymbol{H} \tag{1-52}$$

这种介质是双各向异性介质，式中 $\bar{\bar{\varepsilon}}$、$\bar{\bar{\xi}}$、$\bar{\bar{\zeta}}$、$\bar{\bar{\mu}}$ 都是以并矢表示的张量。

若以上 4 个量都是标量，并仍然具有磁电交叉耦合，则成为双各向同性介质，其本构方程为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+\xi\boldsymbol{H} \tag{1-53}$$

$$\boldsymbol{B}=\zeta\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{H} \tag{1-54}$$

对于氨基酸、DNA 之类物质，其本构方程为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}-\chi\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1-55}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}+\chi\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1-56}$$

具有这种本构方程的介质称为手征介质。

我们将一些常见的概念简要归纳如下：若介质的介电系数 ε、磁导率 μ、电导率 σ 与空间坐标无关，称其为均匀介质。若介质的 ε、μ、σ 与频率无关，称其为非色散介质；反之，则称为色散介质。如果 ε、μ、σ 与电磁波在空间传播的方向性无关，称其为各向同性介质；反之，则称为各向异性介质。若介质的 ε、μ、σ 与电场、磁场的幅度无

关，称其为线性介质；反之，则称为非线性介质。根据物质结构的经典电子理论，由于带电粒子既是带电荷的，又是有惯性的粒子，特别是在高频电磁场中，这种惯性效应是不能忽略的。在高频电磁场作用下，粒子的运动跟不上场的变化，出现了滞后效应，此时 ε、μ 为复数，可表示为

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)-\mathrm{j}\varepsilon''(\omega)=|\varepsilon(\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_e} \tag{1-57}$$

$$\mu(\omega)=\mu'(\omega)-\mathrm{j}\mu''(\omega)=|\mu(\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_m} \tag{1-58}$$

其中，$\varepsilon'(\omega)$是复介电系数的实部，它与频率函数的关系确定电磁波在介质中传播的色散特性；$\varepsilon''(\omega)$是复介电系数的虚部，由它确定电磁波在介质中的损耗。对于复磁导率 $\mu(\omega)$的实部$\mu'(\omega)$和虚部 $\mu''(\omega)$也可作类似的解释。

为了表示介电损耗，通常引入介质损耗角 δ_e，这里 $\delta_e=\arctan\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)$。$\delta_m=\arctan\left(\frac{\mu''}{\mu'}\right)$称为磁损耗角。

1.12　介质分界面上场的边值关系

电磁波在穿过两种介质的传播过程中，因极化、磁化及传导特性不同，在其分界面上一般会出现束缚电荷和诱导电流分布，从而激发附加场，使界面两侧的场量发生跃变。由于介质的介电参数在交界面上不连续，虽然微分形式的麦克斯韦方程组不能直接应用，但可以用差分近似微分，或从积分形式的麦克斯韦方程组出发导出交界面电磁场量必须满足的边值关系。

1. 法向关系

设跨过物质分界面有一小段柱体，截面为 Δa，长度为 Δl。现将方程式(1-41)应用于包围此小段柱体的闭合曲面：

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V\rho_V\mathrm{d}V \tag{1-59}$$

当此柱体向边界无限缩短($\Delta l\to 0$)时，则只剩上下截面的积分不为零，因而

$$(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)\cdot\boldsymbol{n}=\rho_S \tag{1-60}$$

式中：ρ_S 表示自由面电荷密度。

若分界面上不存在自由面电荷，则

$$(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)\cdot\boldsymbol{n}=0 \tag{1-61}$$

由此可见，分界面上任意点电位移矢量的法向分量是不连续的，其差值等于该点的自由面电荷密度。如果分界面上不存在自由面电荷，则电位移矢量的法向分量是连续的。

将方程式(1-42)应用于上述小段柱体。同样可得

$$(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)\cdot\boldsymbol{n}=0 \tag{1-62}$$

即物质边界两边磁感应强度的法向分量连续，即

$$B_{1n}=B_{2n} \tag{1-63}$$

由此可得，$H_{1n}=\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)H_{2n}$，即磁场强度的法向分量存在跃变。

2. 切向关系

设跨过物质边界有一长方形闭合路径 l，其所包围的面积为 $S=l\Delta h$。

(1) 由方程式(1-40)，当 $\Delta h\to 0$ 时，可得

$$(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)\cdot\boldsymbol{l}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial l}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l})\Delta h\Big|_{\Delta h\to 0}=0 \tag{1-64}$$

式中：$\boldsymbol{n}$ 为边界的法线方向单位矢量。

$$[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)]=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\Delta h\Big|_{\Delta h\to 0}=0 \tag{1-65}$$

即介质分界两侧电场强度的切向分量应该连续。

(2)由方程式(1-39)，当 $\Delta h\to 0$ 时，将通过截面 S 的电流 I_f 表示为

$$I_f=\boldsymbol{J}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l})\Delta h=\boldsymbol{J}_S\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l}) \tag{1-66}$$

这里 $\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{J}\Delta h|_{\Delta h\to 0}$ 为沿界面切过线段 $\boldsymbol{l}$ 的面电流密度。用上述方法可得

$$[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)]=\boldsymbol{J}_S \tag{1-67}$$

当物质(或其中之一)的电导率为有限时，则由

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{J}\Delta h|_{\Delta h\to 0}=\sigma\boldsymbol{E}\Delta h|_{\Delta h\to 0} \tag{1-68}$$

因此，在有限导电介质的情况下，通常为

$$[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)]=0 \tag{1-69}$$

即介质分界面上 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量应该连续。上面提到的 4 个边值关系式(1-60)、(1-62)、(1-65)和(1-69)，实质上是物质分界上的场方程，在求解电磁场的问题中，是运用麦克斯韦方程组时必不可少的边界条件。值得指出的是，一般只需要给定电磁场切向分量连续，因为所有场量都必须满足麦克斯韦方程，从而 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量连续将自动得到满足。

第 2 章

对分层介质中电磁场和电磁波研究的历史性回顾

分层介质中的电磁场和电磁波是一个可追溯到20世纪初的探索性课题。基于两层平坦地面模型，Zenneck[1]和Sommerfeld[2]给出了最早的解析结果。后来，越来越多的人从事分层介质中的电磁场和电磁波方面的研究工作[3~115]。1966年，Banōs的专著*Dipole Radiation in the Presence of Conducting Half-Space*[28]较系统地总结了两层介质边界附近的电偶极子激励的电磁场近似解。1970年，Wait的专著*Electromagnetic Waves in Stratified Media*[29]，引入表面阻抗的概念研究了多层介质中的电磁场和电磁波。1992年，King等人的专著*Lateral Electromagnetic Waves*[30]更着重地阐述了垂直和水平电偶极子在两层和三层介质中激励的侧面波问题。本章的主要内容是回顾百余年来此研究领域的主要发展历程及其重要的研究成果。由于作者的研究水平所限，一些重要的研究成果并没有提到。特别需要说明的是，由于本书侧重于解析方法的研究，对于数值方法在分层介质中场与波研究中的应用，本书没有涉及。

2.1 电磁波

假定一个带有单位电矩 $Idl=1$ 的无限小电偶极子位于远离其他介质的真空中，那么它产生的电磁场是向外传播的球面波。

在远区($kr\gg1$)，球坐标系(r,Θ,Φ)下的电场分量和磁场分量可表示为

$$E_\Theta(r,t)=-cB_\Theta(r,t)=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi r}\sin\Theta\sin(\omega t-kr) \tag{2-1}$$

式中：$k=\omega(\mu_0\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}$是真空中的波数；$c=\omega/k$是光速。坡印廷矢量$\boldsymbol{S}(r,t)=\mu_0^{-1}\boldsymbol{E}(r,t)\times\boldsymbol{B}(r,t)$的常相位球面表示为

$$\omega t-kr=\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)=\text{常数} \tag{2-2}$$

在电磁波传播足够远的距离时，这些常相位球面可以近似成平面。在 $\Theta=\pi/2$，$\Phi=0$的情况下，式(2-1)可简化为

$$E_x(x,t)=cB_y(x,t)=\frac{\omega\mu_0}{4\pi r_0}\sin(\omega t-kx) \tag{2-3}$$

这是一个以光速沿着 x 轴正方向传播的平面波。

对近区场而言，$kr<1$，电场和磁场变得十分复杂。除了两个横向分量 $E_\Theta(r,t)$和 $B_\Phi(r,t)$，还有一个沿传播方向的径向分量 $E_r(r,t)$。这三个分量之间的相位和幅度关系不像远区场情况那么简单，所以向外传播的常相位球面图不能直接扩展到近区的情况。

如果无限小电偶极子位于无耗介质中，那么电磁场分量的表达式将与上述真空中的情况相类似，传播波数为 $k=\omega(\mu\varepsilon)^{1/2}$。如果介质不是理想介质，则波数为 $k=\beta+\mathrm{i}\alpha=(\omega^2\mu\varepsilon+\mathrm{i}\omega\mu\sigma)^{1/2}$形式的复数。若时谐因子为 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$，在有耗介质的情况下，形式为$\exp(\mathrm{i}kr)/r=[\exp(-\alpha r)/r]\exp(\mathrm{i}\beta r)$的球面波在远区随指数衰变。当 $\alpha\ll\beta$ 时，在远区球面波仍然可以近似成平面波。对高耗介质而言，$\sigma\gg\omega\varepsilon$，球面波一般不能近似成平面波。

若偶极子源不是位于无限大均匀介质中，而是位于分层介质边界附近，问题将变得十分复杂。沿边界传播的电磁波有着不同寻常的特性和很多重要的应用，这将是本书重点研究的问题。

2.2 Zenneck 表面波

关于对表面波的研究，在国际上起源很早，已经有近百年的历史。这里，首先介绍的是 Zenneck 表面波。

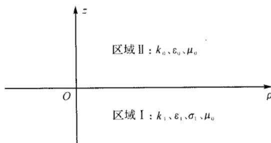


图 2-1　均匀半空间坐标系示意图

1907 年，Zenneck[1] 发现了在两种介质分界面附近可以存在另外一种柱形表面波。如果导电或介质半空间表示为区域Ⅰ，其介电系数和电导率分别 ε_1 和 σ_1，另一半空间为空气，记为区域Ⅱ，如图 2-1 所示。假定$|k_1^2|\gg|k_2^2|$或$|k_1^2|\geqslant 9|k_2^2|$，则在介质

或导体中，这种表面波可简单地表示为[1]

$$\begin{cases} B_{1\varphi}=\mu_0 A e^{ik_1 z} H_1^{(1)}(k_2\rho) \\ E_{1\rho}=-\dfrac{\omega}{k_1}B_{1\varphi} \qquad\qquad z\leqslant 0 \\ E_{1z}=i\dfrac{\omega\mu_0 k_2}{k_1^2}A e^{ik_1 z}H_0^{(1)}(k_2\rho) \end{cases} \tag{2-4}$$

在空气层一侧，这种表面波可表示为

$$\begin{cases} B_{2\varphi}=\mu_0 A e^{-i\frac{k_2^2}{k_1}z} H_1^{(1)}(k_2\rho) \\ E_{2\rho}=-\dfrac{\omega}{k_1}B_{2\varphi} \qquad\qquad z\geqslant 0 \\ E_{2z}=i\dfrac{\omega\mu_0}{k_2}A e^{-i\frac{k_2^2}{k_1}z}H_0^{(1)}(k_2\rho) \end{cases} \tag{2-5}$$

对于远区 $k_2\rho\geqslant 10$，函数的近似式为

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(k_2\rho)\approx\sqrt{\dfrac{2}{\pi k_2\rho}}e^{i(k_2\rho-\frac{\pi}{4})} \\ H_1^{(1)}(k_2\rho)\approx\sqrt{\dfrac{2}{\pi k_2\rho}}e^{i(k_2\rho-\frac{3\pi}{4})} \end{cases} \tag{2-6}$$

可见，这种表面波在向外以柱面波的形式扩散传播时，幅度将以 $\rho^{-1/2}$ 规律衰减，其传播波数为 k_0。而在垂直方向，离开分界面后，两边都以指数规律衰减。但在空气的一侧其衰减速度比在介质(或导体)的一侧慢得多。在式(2-1)和式(2-2)中，常数 A 取决于激励源的性质，但 Zenneck 并没有求出典型的电偶极子激励源对这种波的激励效率。

2.3 索末菲尔德积分

在 20 世纪初，空气—地面界面引导波的机制看起来是最有希望解释远距离的无线电信号的传送的。Sommerfeld 在 1909 年[2]和 1926 年[3]导出了垂直电偶极子在均匀半空间所产生电磁场完整的积分表达式，后来这一类型的积分统称为索末菲尔德积分，并进一步指出这个复杂的积分表达式中包含了一项以 $\rho^{-1/2}$ 规律衰减的表面波。这似乎肯定了 Zenneck 表面波在对远距离微波传播中存在的可能性。然而，1935 年，Sommerfeld[4]在重新检查他的理论时发现：垂直电偶极子在均匀半空间所产生电磁场的完整解的表面波项不能从其他项中分离开来。他进一步指出，Zenneck 表面波不能单独存在，甚至没有可能成为电偶极子激励电磁场的完整表达式中的主要部分。不管怎样，Zenneck 表面波的存在与否成为一系列文章的争论性课题。以后有很多学者，包括 Vander Pol、Norton、Banōs、Wait 等人对此问题的研究都作出了杰出的贡

献[5~7][28~30]。这些研究表明，电磁场的积分表达式中不可能单独分离出一项以 $\rho^{-1/2}$ 规律衰减的表面波。也就是说，在均匀半空间情况下，还没有发现垂直电偶极子能够在介质表面有效地激励 Zenneck 柱型表面波。

2.4 沿分层介质表面传播的表面波

在两种不同的介质分界面中，有可能存在一种表面波[30]，例如微波沿介质波导传播，或光沿光纤的传播，这些都是典型的表面波。三种最常见的能产生表面波的结构[30]为：(1)涂敷介质层的金属平面或圆柱，如图2-2(a)和(b)所示；(2)带有波纹结构的金属平板或圆柱，如图 2-3(a)和(b)所示；(3)介质棒或介质镜像线，如图 2-4(a)和(b)所示。

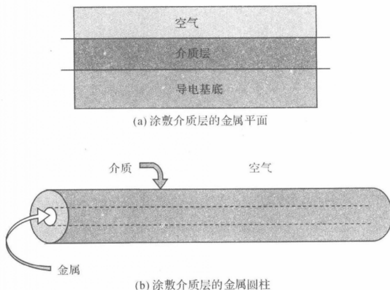
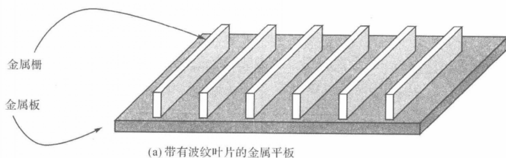
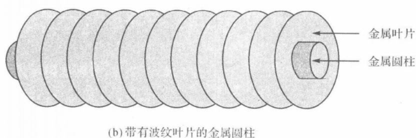


图 2-2　涂敷介质层的金属平面和金属圆柱

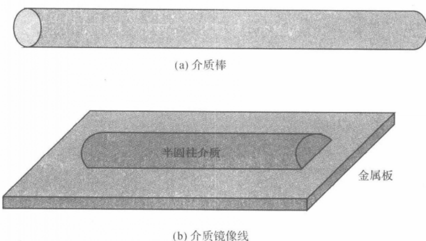


(a) 带有波纹叶片的金属平板



(b) 带有波纹叶片的金属圆柱

图 2-3　带有波纹叶片的金属平板及金属圆柱



(a) 介质棒

(b) 介质镜像线

图 2-4　介质棒及介质镜像线

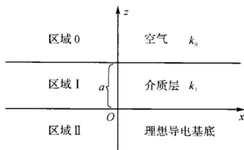


图 2-5　涂敷介质层的无限大导电基底坐标系

对于在涂敷介质层的无限大金属平板上传播的表面波，若取坐标系如图 2-5 所示，其波场结构可表示如下[89]：

对于 TE 波，有

$$\begin{cases} H_x = B\sin K_2 z e^{i\gamma x} \\ H_z = \dfrac{i\gamma}{K_2} B\cos K_2 z e^{i\gamma x} \\ E_y = -\dfrac{i\omega\mu_0}{K_2} B\cos K_2 z e^{i\gamma x} \end{cases} \quad 0 \leqslant z \leqslant a \tag{2-7}$$

$$\begin{cases} H_x = A e^{-K_1 z} e^{i\gamma x} \\ H_z = \dfrac{i\gamma}{K_1} A e^{-K_1 z} e^{i\gamma x} \\ E_y = -\dfrac{i\omega\mu_0}{K_1} A e^{-K_1 z} e^{i\gamma x} \end{cases} \quad z \geqslant a \tag{2-8}$$

其中，参数 γ、K_1、K_2 必须满足特征方程

$$\begin{cases} K_1 a = K_2 a \tan K_2 a \\ K_2^2 + \gamma^2 = k_0^2 \\ \gamma^2 - K_1^2 = k_1^2 \end{cases} \tag{2-9}$$

对于 TM 波，有

$$\begin{cases} E_x = -B\sin K_2 z e^{i\gamma x} \\ E_z = -\dfrac{i\gamma}{K_2} B\cos K_2 z e^{i\gamma x} \\ H_y = -\dfrac{i\omega\varepsilon_0}{K_2} B\cos K_2 z e^{i\gamma x} \end{cases} \quad 0 \leqslant z \leqslant a \tag{2-10}$$

$$\begin{cases} E_x = -A e^{-K_1 z} e^{i\gamma x} \\ E_z = \dfrac{i\gamma}{K_1} A e^{-K_1 z} e^{i\gamma x} \\ H_y = \dfrac{i\omega\varepsilon_0}{K_1} A e^{-K_1 z} e^{i\gamma x} \end{cases} \quad z \geqslant a \tag{2-11}$$

其特征方程为

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}K_1 = K_2\tan K_2 a \\ K_2^2+\gamma^2=k_0^2 \\ \gamma^2-K_1^2=k_1^2 \end{cases} \tag{2-12}$$

这种表面波，在空气一侧，离开介质表面后，场分量以指数规律衰减，在传播方向（x 轴方向），则以波数 γ 传播，γ 在 k_0 和 k_1 之间，可由特征方程求出，它与介质层的厚度及介质的传播波数有关。如果介质是无损耗的，金属板为理想导电平板，则这种表面波在向外传播时幅度不衰减。

2.5　沿两种介质分界面传播的侧面波

对于侧面波的研究，King 等人在 1992 年出版了一本专著[30]，专门对侧面波进行了系统论述。近几十年来国际上也已经有了大量的文献报道，在本书末尾的参考文献列表中仅列出了部分参考文献。

典型的侧面波是指当发射或接收天线都放置在地下或水下有耗介质中时，电磁波能量首先从发射天线向上渗透过土壤（或水），进入空气层，然后沿空气土壤（或水）的分界面传播，到接收天线上方后再次渗透过土壤（或水）到达接收天线的波，其传播路径如图 2-6 所示。

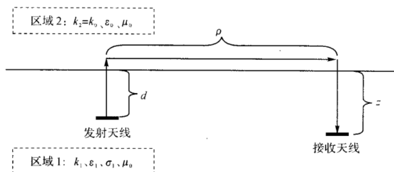


图 2-6　侧面波传播路径示意图

20 世纪 80 年代，Wu 和 King 等人[47]成功地得到了水平电偶极子（地上或地下）在均匀半空间两侧的适合于工程计算的精确的解析表达式。若收发天线都放置在有耗介质一侧，则接收点的电场可表示为[30]

$$E_1(\rho,z)=E_1^{\text{Inc}}(\rho,z)+E_1^{\text{ref}}(\rho,z)+E_1^{L}(\rho,z) \tag{2-13}$$

式中：第一项表示直射波（L_1）；第二项表示理想反射波（L_2）；第三项表示侧面波（路径 L 包含 d 和 z）。这三项的传播路径分别如图 2-7 所示。

在 King 等人的专著里[30]，水平和垂直电偶极子在均匀半空间所产生的场（地上

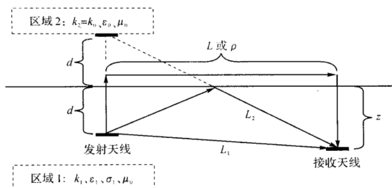


图 2-7　直射波、反射波及侧面波传播路径示意图

或地下)一般被分开为三项，其中第一项是直射波，第二项是理想反射波，第三项是侧面波。按照他们的分析，侧面波是沿两种介质中损耗小的一侧传播的，其传播波数 $k_2=k_0$，其幅度随距离的变化规律可用误差余函数或菲涅耳积分(Fresnel integral)表示。这些理论分析结果已被精细的模拟实验和直接的数值计算所验证，并被多数学者所接受。

2.6　沿三层介质分界面传播的吸附表面波

水平和垂直电偶极子在涂敷介质层的导电基底上激励的电磁场有多种实际意义，例如长波在有冰层覆盖的海面上传播、超短波在沥青或水泥覆盖的泥土上传播、微带天线在导电基底的硅片上激起的电磁场等。1994 年，King 和 Sandler 发表了他们的研究结果[67]，指出只要中间介质层的厚度不大，远区沿介质表面的波主要是侧面波，并以 ρ^{-2} 规律衰减。文章发表后，1998 年 Wait 发表了一篇研究评论[68]，认为 King 和 Sandler 的结果[67]没有考虑到沿介质表面传播的吸附表面波(trapped surface wave)。在远区，吸附表面波应以 $\rho^{-1/2}$ 规律衰减。在 Wait 的若干论文中，多次强调了在分层介质中由电偶极子激励的电磁场中，主项将是吸附表面波项。2005 年，Collin 的工作[71]支持了 Wait 的论断，并进一步指出[72]，所谓的吸附表面波是由极点的留数决定的。最近几年的一系列论文[90~95]研究了三层介质中由电偶极子激励的电磁场。结果表明：吸附表面波可以由垂直和水平电偶极子在涂敷介质层的导电基底上面有效地激励吸附表面波。吸附表面波是由极点的留数决定的，在远区以 $\rho^{-1/2}$ 规律衰减，传播波数 γ 在 k_0 和 k_1 之间。离开介质表面后，吸附表面波以指数规律衰减。三层介质中的电场近似解的完整表达式可以写成如下形式[90~95]：

$$E_1(\rho,z)=E_1^{\text{Inc}}(\rho,z)+E_1^{\text{ref}}(\rho,z)+E_1^{L}(\rho,z)+E_1^{S}(\rho,z) \tag{2-14}$$

式中：第一项表示直射波(L_1)；第二项表示理想反射波(L_2)；第三项表示侧面波(L)；

第四项表示吸附表面波(S)。

需要说明的是,由极点的留数决定的表面波,有些学者称之为吸附表面波,也有的学者称之为表面波。在本书中我们沿用 King、Wait、Collin 等人的说法,称之为吸附表面波。

2.7 偶极子在地球表面激励的辐射场

在处理实际问题时,有时往往需要采用球形模型。垂直电偶极子在均匀不完全导电球面上的辐射场的求解是一个相当复杂的问题。早在 1918 年,Watson[13]就作出了最重要的贡献,即得到了球形地面外面的波场的球谐级数表达式。但此级数表达式收敛很慢,很难进行实际计算,在工程上没有多少实际应用价值。后来,许多人在 Watson 工作的基础上做了大量的研究工作[14~27]。特别值得一提的是,Wait[13~21]、Bremmer[24~26]和 Fock[27]都作出了重要贡献。1965 年,Fock 将 Watson 给出的级数经过一系列变换和近似处理,变成一个收敛相当快的级数表达式,它的适用范围是场源与场点都离地面不太远。目前工程上实际应用的地波传播场强与相位计算公式即是 Fock 理论[27]所给出的公式。假定垂直电偶极子 Idl 位于极轴($\theta=0°$)上,电场分量 E_r 的近似表达式可表示为

$$E_r=E_0V(x,y_0,y_1,q) \tag{2-15}$$

其中

$$E_0=-\frac{\mathrm{i}Idl\eta}{\lambda}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0a\theta}}{a\sqrt{\theta\sin\theta}} \tag{2-16}$$

$$V(x,y_0,y_1,q)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\pi x}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_sx}}{t_s-q^2}\frac{W_2(t_s-y_0)}{W_2(t_s)}\frac{W_2(t_s-y_1)}{W_2(t_s)} \tag{2-17}$$

$$x=\left(\frac{k_0a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\theta \tag{2-18}$$

$$y_0=\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{\frac{1}{3}}k_0z_s \tag{2-19}$$

$$y_1=\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{\frac{1}{3}}k_0z_r \tag{2-20}$$

式中:z_s 和 z_r 分别是场源与接收点离地面的高度;η 为自由空间的波阻抗;a 为地球半径;θ 表示收发点相距的角距离。爱里(Airy)函数 $W_2(t_s)$满足斯托克斯(Stokes)方程,即

$$W_2'(t)-qW_2(t)=0 \tag{2-21}$$

其中

$$q = \mathrm{i}\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \Delta_g \tag{2-21}$$

式中:Δ_g 是地面的归一化表面阻抗。

式(2-15)即为目前工程上应用的地波绕射计算公式,其中 $V(x, y_0, y_1, q)$ 称为地波绕射衰减因子,它与电波工作频率、收发点相距的角距离、地面等效电导率、收发点离地面高度以及地球半径有关。

近年来,Houzonmis[73,74] 和 Magnetis[75] 分别给出了光滑地球表面垂直电偶极子和水平电偶极子激励的电磁场的严格解。对于 Houzonmis 和 Magnetis 两人的工作,限制条件是源点和场点必须同时放置在球形地面上。另外,其数学推导十分复杂。

第 3 章

垂直电偶极子在三层介质中激励的电磁场

本章主要介绍两部分内容：第一部分内容研究了垂直电偶极子在三层介质中激励的电磁场，分别获得了在理想导电基底和非理想导电基底两种情况下完整的解析表达式，结果表明电磁场分量可以分解为直射波、理想反射波、吸附表面波和侧面波四部分。其中，吸附表面波的传播波数既不是空气中的波数也不是介质中的波数，而是介于两者之间[90][91]。第二部分内容研究了垂直电偶极子在三层介质中的辐射问题，给出了几种典型情况下辐射场的计算结果[92]。本章和以后各章节中时谐因子均取为 $e^{-i\omega t}$。

3.1 电磁波场分量的积分表达式

垂直电偶极子在涂敷介质层的导电基底上的激励问题，可以用三层介质的物理模型来表征。若采用如图 3-1 所示的坐标系，三个区域的电磁场都应满足麦克斯韦方程组：

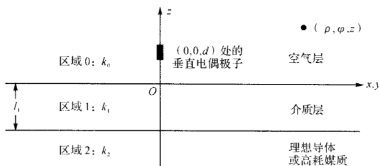


图 3-1　三层区域的电磁场坐标系

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_j = \mathrm{i}\omega \boldsymbol{B}_j \tag{3-1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}_j = -\mathrm{i}\frac{k_j^2}{\omega}\boldsymbol{E}_j + \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{3-2}$$

式中：$j=0,1,2$ 分别表示三个区域；垂直电偶极子源 $\boldsymbol{J}$ 可表示为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{e}_z I\,\mathrm{d}l\,\delta(x)\delta(y)\delta(z-d) \tag{3-3}$$

首先定义场分量的二维傅里叶变换为

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\xi,\eta,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi x+\eta y)}\boldsymbol{E}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3-4}$$

其逆变换为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x+\eta y)}\widetilde{\boldsymbol{E}}(\xi,\eta,z)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{3-5}$$

对于 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ 和 $\boldsymbol{J}(x,y,z)$，同样有相应的二维傅里叶变换及逆变换公式。对式(3-1)和式(3-2)按直角坐标展开，并进行二维傅里叶变换，整理后可得

$$\mathrm{i}\eta\widetilde{E}_{jz} - \frac{\partial \widetilde{E}_{jy}}{\partial z} = \mathrm{i}\omega\widetilde{B}_{jx} \tag{3-6}$$

$$\mathrm{i}\xi\widetilde{E}_{jz} - \frac{\partial \widetilde{E}_{jx}}{\partial z} = -\mathrm{i}\omega\widetilde{B}_{jy} \tag{3-7}$$

$$\mathrm{i}\xi\widetilde{E}_{jy} - \mathrm{i}\eta\widetilde{E}_{jx} = 0 \tag{3-8}$$

$$\frac{\partial \widetilde{B}_{jy}}{\partial z} = \mathrm{i}\frac{k_j^2}{\omega}\widetilde{E}_{jx} \tag{3-9}$$

$$\frac{\partial \widetilde{B}_{jx}}{\partial z} = -\mathrm{i}\frac{k_j^2}{\omega}\widetilde{E}_{jy} \tag{3-10}$$

$$\mathrm{i}\xi\widetilde{B}_{jy} - \mathrm{i}\eta\widetilde{B}_{jx} = -\mathrm{i}\frac{k_j^2}{\omega}\widetilde{E}_{jz} + \mu_0\delta(z-d) \tag{3-11}$$

从式(3-8)、式(3-9)和式(3-10)可得

$$\widetilde{E}_{jy} = \frac{\eta}{\xi}\widetilde{E}_{jx} \tag{3-12}$$

$$\widetilde{B}_{jy} = -\frac{\xi}{\eta}\widetilde{B}_{jx} \tag{3-13}$$

联立方程式(3-6)至式(3-11)，消去电场分量，可得磁场分量的傅里叶变换式所满足的方程，即为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + \gamma_j^2\right)\widetilde{B}_{jx} = -\mathrm{i}\eta\mu_0\delta(z-d) \tag{3-14}$$

其中

$$\gamma_j = \sqrt{k_j^2 - \xi^2 - \eta^2} \quad j=0,1,2 \tag{3-15}$$

这里为了满足辐射条件必须规定 γ_j 的虚部为正。

方程式(3-14)解出后，其他的各个电场分量的傅里叶变换式就可用 $\widetilde{B}_{jx}$ 表示。

$$\widetilde{E}_{jx}=-\mathrm{i}\,\frac{\omega}{k_j^2}\frac{\partial \widetilde{B}_{jy}}{\partial z}=\mathrm{i}\,\frac{\omega}{k_j^2}\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial \widetilde{B}_{jx}}{\partial z} \tag{3-16}$$

$$\widetilde{E}_{jy}=\mathrm{i}\,\frac{\omega}{k_j^2}\frac{\partial \widetilde{B}_{jx}}{\partial z} \tag{3-17}$$

$$\widetilde{E}_{jz}=\frac{\omega}{\eta k_j^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_j^2\right)\widetilde{B}_{jx} \tag{3-18}$$

方程式(3-14)解的形式应当为 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\gamma_j z}$。因为在区域 0 有场源，而在区域 1 和 2 没有场源，故在区域 0 中的场可取为

$$\widetilde{B}_{0x}(z)=C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0 z}-\frac{\eta\mu_0}{2\gamma_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|},\quad z\geqslant 0 \tag{3-19}$$

式中：后一项表示由于场源产生的特解；前一项表示界面产生的反射波。

在区域 1，应有上行和下行的两个波，故可取为

$$\widetilde{B}_{1x}(z)=C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_1 z}+C_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_1 z} \tag{3-20}$$

在区域 2，由于向下伸展到 $-\infty$，因而仅有下行波而没有上行波，故可取为

$$\widetilde{B}_{2x}(z)=C_4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_2 z} \tag{3-21}$$

下面利用边界条件来确定各系数 C_j 的值。

在 $z=0$ 处应有 $\widetilde{B}_{1x}|_{z=0}=\widetilde{B}_{0x}|_{z=0}$，故可得

$$C_1-\frac{\eta\mu_0}{2\gamma_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_0 d}=C_2+C_3 \tag{3-22}$$

在 $z=-l$ 处，应有 $\widetilde{B}_{1x}|_{z=-l}=\widetilde{B}_{2x}|_{z=-l}$，故可得

$$C_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_1 l}+C_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_1 l}=C_4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_2 l} \tag{3-23}$$

由 $\widetilde{E}_{jy}=\mathrm{i}\,\frac{\omega}{k_j^2}\frac{\partial \widetilde{B}_{jx}}{\partial z}$ 和在 $z=0$ 处的连续性，可得

$$\frac{\gamma_0}{k_0^2}\left(C_1+\frac{\eta\mu_0}{2\gamma_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0 d}\right)=\frac{\gamma_1}{k_1^2}(-C_2+C_3) \tag{3-24}$$

由 $z=-l$ 处的边界条件，可得

$$\frac{\gamma_1}{k_1^2}(-C_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_1 l}+C_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_1 l})=-\frac{\gamma_2}{k_2^2}C_4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_2 l} \tag{3-25}$$

联立方程式(3-22)至式(3-25)，可解得

$$C_1=\frac{\eta\mu_0}{2\gamma_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0 d}Q \tag{3-26}$$

其中

$$Q=-\frac{\dfrac{\gamma_0}{k_0^2}-\dfrac{\gamma_2}{k_2^2}-\mathrm{i}\left(\dfrac{k_1^2\gamma_0\gamma_2}{k_0^2k_2^2\gamma_1}-\dfrac{\gamma_1}{k_1^2}\right)\tan\gamma_1 l}{\dfrac{\gamma_0}{k_0^2}+\dfrac{\gamma_2}{k_2^2}-\mathrm{i}\left(\dfrac{k_1^2\gamma_0\gamma_2}{k_0^2k_2^2\gamma_1}+\dfrac{\gamma_1}{k_1^2}\right)\tan\gamma_1 l} \tag{3-27}$$

于是，在区域 0 中的场分量的变换可表示为

$$\widetilde{B}_{0x}=-\eta\mu_0\,\frac{1}{2\gamma_0}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}-Q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\right] \tag{3-28}$$

$$\widetilde{B}_{0y}=-\frac{\xi}{\eta}\widetilde{B}_{0x}=\xi\mu_0\frac{1}{2\gamma_0}\left[e^{i\gamma_0|z-d|}-Qe^{i\gamma_0(z+d)}\right] \tag{3-29}$$

$$\widetilde{B}_{0z}=0 \tag{3-30}$$

$$\widetilde{E}_{0x}=-i\frac{\omega}{k_0^2}\frac{\partial\widetilde{B}_{0y}}{\partial z}=\frac{\omega\xi\mu_0}{k_0^2}\left[\pm\frac{1}{2}e^{i\gamma_0|z-d|}+Qe^{i\gamma_0(z+d)}\right] \tag{3-31}$$

$$\widetilde{E}_{0y}=\frac{\omega\eta\mu_0}{k_0^2}\left[\pm\frac{1}{2}e^{i\gamma_0|z-d|}+Qe^{i\gamma_0(z+d)}\right] \tag{3-32}$$

$$\widetilde{E}_{0z}=\frac{\omega\mu_0(\xi^2+\eta^2)}{2k_0^2}\frac{1}{\gamma_0}\left[e^{i\gamma_0|z-d|}-Qe^{i\gamma_0(z+d)}\right] \tag{3-33}$$

在式(3-28)至式(3-33)中，利用二维傅里叶逆变换公式，即可先求得直角坐标系下的各个电磁场分量，再进行直角坐标系到圆柱坐标系的变量代换。取

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ \rho^2=x^2+y^2\end{cases} \tag{3-34}$$

以及

$$\begin{cases}\xi=\lambda\cos\varphi'\\ \eta=\lambda\sin\varphi'\\ \lambda^2=\xi^2+\eta^2\end{cases} \tag{3-35}$$

则有

$$d\xi d\eta=\lambda d\varphi' d\lambda \tag{3-36}$$

$$\xi x+\eta y=\lambda\rho\cos(\varphi-\varphi') \tag{3-37}$$

$$\begin{cases}E_\rho=E_x\cos\varphi+E_y\sin\varphi\\ E_\varphi=-E_x\sin\varphi+E_y\cos\varphi\end{cases} \tag{3-38}$$

$$\begin{cases}B_\rho=B_x\cos\varphi+B_y\sin\varphi\\ B_\varphi=-B_x\sin\varphi+B_y\cos\varphi\end{cases} \tag{3-39}$$

将 E_x、E_y、B_x、B_y 的二重积分表达式代入式(3-38)和式(3-39)，再利用贝塞尔函数的积分恒等式，即

$$J_0(\lambda\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\lambda\rho\cos(\varphi-\varphi')}d\varphi' \tag{3-40}$$

$$J_1(\lambda\rho)=-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\lambda\rho\cos(\varphi-\varphi')}\cos(\varphi-\varphi')d\varphi' \tag{3-41}$$

最后即得到在柱坐标系下的各个场分量的一重积分表达式。具体表示如下：

$$B_{0\varphi}(\rho,z)=-\frac{i\mu_0}{4\pi}\int_0^{\infty}\left[e^{i\gamma_0|z-d|}-Qe^{i\gamma_0(z+d)}\right]J_1(\lambda\rho)\gamma_0^{-1}\lambda^2 d\lambda \tag{3-42}$$

$$E_{0\rho}(\rho,z)=-\frac{i\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\left[\pm e^{i\gamma_0|z-d|}-Qe^{i\gamma_0(z+d)}\right]J_1(\lambda\rho)\lambda^2 d\lambda \tag{3-43}$$

$$E_{0z}(\rho,z)=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\left[e^{i\gamma_0|z-d|}-Qe^{i\gamma_0(z+d)}\right]J_1(\lambda\rho)\gamma_0^{-1}\lambda^3 d\lambda \tag{3-44}$$

3.2 理想导电基底情况下垂直电偶极子激励的电磁场

3.2.1 表面波和侧面波的积分表达式

在理想导电基底条件下($k_2 \to \infty$),式(3-42)至式(3-44)可以简化为

$$B_{0\varphi}(\rho,z) = \frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi}\int_0^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)} - (Q+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\right]\gamma_0^{-1}J_1(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{3-45}$$

$$E_{0\rho}(\rho,z) = \frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\left[\pm\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)} - (Q+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\right]J_1(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda,\quad \begin{matrix} z \geqslant d \\ 0 < z < d \end{matrix} \tag{3-46}$$

$$E_{0z}(\rho,z) = -\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)} - (Q+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\right]\gamma_0^{-1}J_0(\lambda\rho)\lambda^3\mathrm{d}\lambda \tag{3-47}$$

其中

$$\gamma_j = \sqrt{k_j^2 - \lambda^2},\quad j=0,1 \tag{3-48}$$

且式(3-27)中的反射系数 Q 可以简化为

$$Q = -\frac{k_1^2\gamma_0 + ik_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l}{k_1^2\gamma_0 - ik_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l} \tag{3-49}$$

式(3-45)至式(3-47)中第一项和第二项分别代表位于$(0,\ 0,\ d)$处的电偶极子源发出的直射波、理想反射波或者从位于$(0,\ 0,\ -d)$处的镜像源发出的波。可求出它们积分的精确表达式[30][67],故场分量的进一步分析仅需对第三项积分进行求解。

为方便起见,将式(3-45)至式(3-47)改写为

$$B_{0\varphi}(\rho,z) = B_{0\varphi}^{(1)} + B_{0\varphi}^{(2)} + B_{0\varphi}^{(3)} \tag{3-50}$$

$$E_{0\rho}(\rho,z) = E_{0\rho}^{(1)} + E_{0\rho}^{(2)} + E_{0\rho}^{(3)} \tag{3-51}$$

$$E_{0z}(\rho,z) = E_{0z}^{(1)} + E_{0z}^{(2)} + E_{0z}^{(3)} \tag{3-52}$$

由此,我们可以直接写出式(3-45)至式(3-47)中第一项和第二项的精确表达式[30][67]:

$$B_{0\varphi}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1} - \frac{1}{r_1^2}\right) \tag{3-53}$$

$$B_{0\varphi}^{(2)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2} - \frac{1}{r_2^2}\right) \tag{3-54}$$

$$E_{0\rho}^{(1)}=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}e^{ik_0r_1}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{ik_0}{r_1}-\frac{3}{r_1^2}-\frac{3i}{k_0r_1^3}\right)\tag{3-55}$$

$$E_{0\rho}^{(2)}=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}e^{ik_0r_2}\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{ik_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3i}{k_0r_2^3}\right)\tag{3-56}$$

$$E_{0z}^{(1)}=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}e^{ik_0r_1}\left[\frac{ik_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}-\frac{i}{k_0r_1^3}-\left(\frac{z-d}{r_1}\right)^2\cdot\left(\frac{ik_0}{r_1}-\frac{3}{r_1^2}-\frac{3i}{k_0r_1^3}\right)\right]\tag{3-57}$$

$$E_{0z}^{(2)}=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}e^{ik_0r_2}\left[\frac{ik_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}-\frac{i}{k_0r_2^3}-\left(\frac{z+d}{r_2}\right)^2\cdot\left(\frac{ik_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3i}{k_0r_2^3}\right)\right]\tag{3-58}$$

其中

$$r_1=\sqrt{\rho^2+(z-d)^2}\tag{3-59}$$

$$r_2=\sqrt{\rho^2+(z+d)^2}\tag{3-60}$$

接下来需要求解式(3-45)至式(3-47)中的第三项。式(3-52)中的 $B_{0\varphi}^{(3)}$ 代表式(3-45)中的第三项,可表示为

$$B_{0\varphi}^{(3)}=-\frac{k_0^2\mu_0}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\tan\gamma_1 l\cdot\gamma_1\cdot e^{i\gamma_0(z+d)}\cdot J_1(\lambda\rho)\lambda^2}{(k_1^2\gamma_0-ik_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l)\gamma_0}d\lambda\tag{3-61}$$

考虑到

$$J_n(\lambda\rho)=\frac{1}{2}[H_n^{(1)}(\lambda\rho)+H_n^{(2)}(\lambda\rho)]\tag{3-62}$$

$$H_n^{(1)}(-\lambda\rho)=H_n^{(2)}(\lambda\rho)(-1)^{n+1}\tag{3-63}$$

以及 γ_0、γ_1 是 λ 的偶函数,故式(3-61)可改写为

$$B_{0\varphi}^{(3)}=-\frac{k_0^2\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tan\gamma_1 l\cdot\gamma_1\cdot H_1^{(1)}(\lambda\rho)\cdot e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda^2}{(k_1^2\gamma_0-ik_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l)\gamma_0}d\lambda\tag{3-64}$$

同理可得

$$E_{0\rho}^{(3)}=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_1\tan\gamma_1 l\cdot H_1^{(1)}(\lambda\rho)\cdot e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda^2}{k_1^2\gamma_0-ik_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l}d\lambda\tag{3-65}$$

$$E_{0z}^{(3)}=-\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_1\tan\gamma_1 l\cdot H_0^{(1)}(\lambda\rho)\cdot e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda^3}{(k_1^2\gamma_0-ik_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l)\gamma_0}d\lambda\tag{3-66}$$

式(3-64)至式(3-66)即为垂直电偶极子在涂敷介质层理想导电基底上激励起的表面波和侧面波的积分表达式。

3.2.2 极点方程的根的求解

为了求解场分量的完整结果,就必须对式(3-64)至式(3-66)中的三个积分式进行估值。在实际问题中,场点往往离开源点的水平距离较远,即 $k_0\rho\gg1$,而一般更关心的是靠近介质表面的传播特性,因此 $k_0(z+d)$ 可理解为不太大。又因为这三个被积函数式中都包含有振荡的贝塞尔函数,故若沿实轴直接数值积分,则收敛速度将会很慢且不易得到精确的结果。为了简化运算,可以进一步考察这三个被积函数在复平面上的奇点性质。这三个被积函数满足方程

$$q(\lambda)=k_1^2\gamma_0-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l=0 \tag{3-67}$$

式(3-67)的根处都为极点。由于在一般情况下主要关心的是沿径向传播的波，故可考虑 λ 取实数，且只关心 $k_0\leqslant\lambda\leqslant k_1$ 的区域。首先假定介质是无损耗介质，则此时的 γ_1 为正实数，γ_0 为正虚数。若令

$$f(\lambda)=\frac{k_1^2\gamma_0}{\mathrm{i}k_0^2\gamma_1} \tag{3-68}$$

$$g(\lambda)=\tan\gamma_1 l \tag{3-69}$$

则函数 $f(\lambda)$ 在 $k_0\leqslant\lambda\leqslant k_1$ 范围内为正实数，且单调逐增，有

$$f(\lambda)\big|_{\lambda=k_0}=0,\quad f(\lambda)\big|_{\lambda=k_1}=\infty$$

而函数 $g(\lambda)$ 也为实数，随着 $\gamma_1 l$ 的取值变化将是一个周期函数。下面分析函数 $g(\lambda)$ 的特性：当 $\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<\pi/2$ 时，若 λ 从 k_0 变至 k_1，则 $g(\lambda)$ 从正 $\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l$ 单调下降至 0，故函数 $g(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 在 $k_0\leqslant\lambda\leqslant k_1$ 区间有唯一的交点 λ_1^*。如图 3-2(a)所示为在工作频率 $f=100\text{MHz}$、介质的相对介电系数 $\varepsilon_{r1}=2.85$、介质层厚度 $\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l=0.45\pi$ 的情况下求解方程的根 λ_1^* 的示意图。

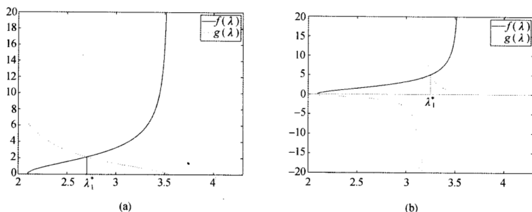


图 3-2　当 $\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<\pi$ 时求解方程式(3-67)根的示意图

当 $\pi/2<\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<\pi$ 时，若 λ 从 k_0 变为 k_1，则 $g(\lambda)$ 从一个负的 $\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l$ 的单调下降至 $-\infty$，然后越过 $\gamma_1 l=\pi/2$，再从 $+\infty$ 下降至 $\lambda=k_1$ 时的 0，在此范围内，方程式(3-67)仅有一个根。如图 3-2(b)所示是在工作频率 $f=100\text{MHz}$、介质的相对介电系数 $\varepsilon_{r1}=2.85$、介质层厚度 $\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l=0.9\pi$ 的情况下求解方程的根 λ_1^* 的示意图。当 $\pi<\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<3\pi/2$ 时，则方程式(3-67)的根应有两个。如图 3-3(a)所示是在工作频率 $f=100\text{MHz}$、介质的相对介电系数 $\varepsilon_{r1}=2.85$、介质层厚度 $\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l=1.4\pi$ 的情况下求解方程的根 λ_1^* 和 λ_2^* 的示意图。当 $3\pi/2<\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<2\pi$ 时，则方程式(3-67)的根也应有两个。如图 3-3(b)所示是在工作频率 $f=100\text{MHz}$、介质的相对介电系数 $\varepsilon_{r1}=2.85$、介质层厚度 $\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l=1.7\pi$ 的情况下求解方程的根 λ_1^* 和 λ_2^*

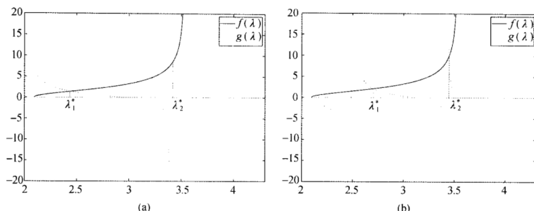


图 3-3　当 $\pi<\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<2\pi$ 时求解方程式(3-67)根的示意图

的示意图。一般地说，若 $n\pi<\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<(n+1)\pi$，则方程式(3-67)应有$(n+1)$个根，即被积函数有$(n+1)$个极点$(n=0,1,2,\cdots)$。

3.2.3　极点方程的根的变化规律

如果介质层是无损耗的介质，利用上节的图解法可以直接求解出根的精确值。如果介质层是低损耗的介质，可以首先求解出无损耗情况下的根值，把它作为初值，再利用牛顿迭代法求解出低损耗介质情况下根的精确值。牛顿迭代法只能求解初值与准确解相差很小的根，直接使用数值方法即可求解低损耗介质情况下根的精确值。

当介质层为无损耗介质时，如图 3-4 所示为极点方程的第一个根随介质层厚度 l 的变化规律曲线。此种情况下极点方程的根将是一个介于 k_0 和 k_1 之间的正实数。

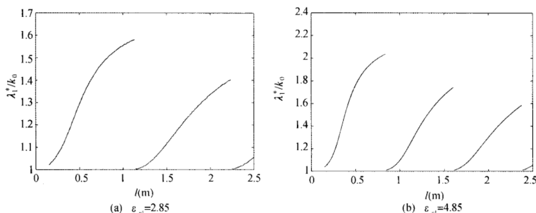


图 3-4　介质层为无损耗的极点方程的第一个根：$f=100\text{MHz}$

当介质层为有损耗介质时，极点方程的根将不再是一个实数，而是一个含有比较

小的虚部的复数，但其实部与无损耗情况下的根相差很小，几乎完全一样，所以如图 3-5 所示仅给出了极点方程根的虚部变化规律曲线，其实部变化规律完全可以参考如图 3-4 所示无损耗介质的情况。从图中可以看出：极点方程根的值不是单调上升的，而是达到一定值后就弯下来，但方程的根是随介质层的厚度连续变化的。

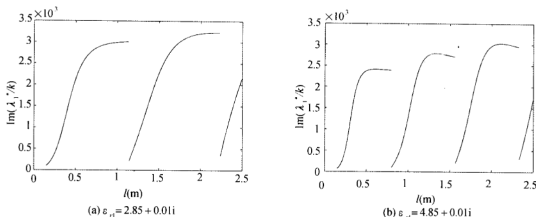


图 3-5　有耗介质的极点方程第一个根的虚部：$f=100\text{MHz}$

3.2.4 理想导电基底情况下三层介质中场分量的完整表达式

方程式(3-67)的根求出后，就得到了场分量积分表达式中的被积函数的极点。除了极点以外，式(3-64)至式(3-66)中的被积函数的支点分别位于 $\lambda=k_0$ 和 $\lambda=k_1$，为了将根式函数 γ_0 和 γ_1 分解成单值分支，在 λ 的复平面上分别以 $\lambda=k_0$ 和 $\lambda=k_1$ 为端点取平行于虚轴的两个割缝，如图 3-6 所示。

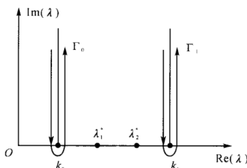


图 3-6　被积函数的极点和支点示意图

这两个割缝的另一端无穷远，在以 k_0 为端点的割缝 Γ_0 两侧，γ_0 的幅角彼此相差 180°，γ_1 的幅角保持不变。而在以 k_1 为端点的割缝 Γ_1 两侧，情况则相反，即 γ_0 的幅角保持不变，而 γ_1 的幅角却彼此相差 180°。在此规定下，由复变函数理论可知，式(3-67)的积分可以简化为

$$B_{0\varphi}^{(3)}(\rho,z) = 2\pi\mathrm{i}\frac{-k_0^2\mu_0}{4\pi}\sum_j \frac{\tan[\gamma_1(\lambda_j^*)l]\cdot\gamma_1(\lambda_j^*)\lambda_j^{*2}}{q'(\lambda_j^*)\gamma_0(\lambda_j^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j^*)(z+d)}\cdot H_1^{(1)}(\lambda_j^*\rho)$$
$$-\frac{k_0^2\mu_0}{4\pi}\int_{\Gamma_0+\Gamma_1}\frac{\tan\gamma_1 l\cdot\gamma_1 H_1^{(1)}(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}}{q(\lambda)\gamma_0}\cdot\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{3-70}$$

其中

$$q(\lambda)=k_1^2\gamma_0-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l \tag{3-71}$$

$$q'(\lambda)=-\frac{k_1^2\lambda}{\gamma_0}+\frac{\mathrm{i}k_0^2\lambda}{\gamma_1}\tan\gamma_1 l+\mathrm{i}k_0^2\cdot\lambda\cdot l\cdot\sec^2\gamma_1 l \tag{3-72}$$

式(3-70)中第一项求和式表示对所有的极点留数求和。若介质层厚度满足 $n\pi<\sqrt{k_1^2-k_0^2}l<(n+1)\pi$，则有 $(n+1)$ 个极点 $(n=0,1,2,\cdots)$。

在割缝 Γ_0 两侧，取

$$\lambda=k_0(1+\mathrm{i}\tau^2) \tag{3-73}$$

此时

$$H_1^{(1)}(\lambda\rho)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0\rho-\frac{3}{4}\pi)}\cdot\mathrm{e}^{-k_0\rho\tau^2} \tag{3-73}$$

当场点离场源较远时，则 $k_0\rho\gg1$，由指数函数 $\mathrm{e}^{-k_0\rho\tau^2}$ 的衰减性质可知，沿割缝的积分主要集中在支点附近，此时 γ_0 可近似为

$$\gamma_0=\sqrt{k_0^2-\lambda^2}\approx k_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}\sqrt{2}\cdot\tau \tag{3-74}$$

在割缝 Γ_0 的左侧，γ_0 的幅角变为 $-\pi/4$，τ 从 $-\infty$ 变至 0，当 λ 绕支点逆时针旋转 90°到达实轴时，γ_0 的幅角变为 $\pi/2$；在割缝 Γ_0 的右侧 τ 从 0 变至 $+\infty$，γ_0 的幅角为 $3\pi/4$，这与我们求解极点方程式(3-67)时对 γ_0 的取值规定一致。而在此路径上靠近支点 k_0 处，γ_1 可近似为

$$\gamma_1=\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\approx\sqrt{k_1^2-k_0^2} \tag{3-75}$$

于是，式(3-70)中沿割缝 Γ_0 的积分可改写为

$$\int_{\Gamma_0}\frac{\tan\gamma_1 l\cdot\gamma_1\cdot H_1^{(1)}(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}}{q(\lambda)\gamma_0}\lambda^2\mathrm{d}\lambda$$
$$=\frac{k_0\sqrt{k_1^2-k_0^2}}{k_1^2}\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}l\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}$$
$$\cdot\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0\rho+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)^2\right]$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-k_0\rho\left(\tau+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}\right)^2\right]}{\tau-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\frac{k_0}{k_1^2}\sqrt{\frac{k_1^2-k_0^2}{2}}\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}l}\mathrm{d}\tau \tag{3-76}$$

因为

$$r_2=\sqrt{\rho^2+(z+d)^2}\approx\rho\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)^2\right] \tag{3-77}$$

并令

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}\,\frac{k_0\ \sqrt{k_1^2-k_0^2}}{k_1^2}\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l\right) \tag{3-78}$$

则式(3-76)可以改写为

$$\int_{\Gamma_0}\frac{\tan\gamma_1 l\cdot\gamma_1\cdot H_1^{(1)}(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}}{q(\lambda)\gamma_0}\lambda^2\mathrm{d}\lambda$$
$$=\frac{k_0\ \sqrt{k_1^2-k_0^2}}{k_1^2}\cdot\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0r_2+\frac{\pi}{4})}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-k_0\rho t^2}}{t-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\Delta}\mathrm{d}t \tag{3-79}$$

由数学手册[121]中的式(3.466),可算出式(3-79)中的积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-k_0\rho t^2}}{t-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\Delta}\mathrm{d}t=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\Delta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-k_0\rho t^2}}{t^2-\mathrm{i}\Delta^2}\mathrm{d}t=\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta^2k_0\rho}\cdot\mathrm{erfc}(\sqrt{-\mathrm{i}\Delta^2k_0\rho}) \tag{3-80}$$

其中,erfc 表示误差函数,定义[119]如下:

$$\mathrm{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \tag{3-81}$$

而式(3-80)中 $\sqrt{-\mathrm{i}\Delta^2k_0\rho}$ 的幅角规定为

$$\left|\arg\sqrt{-\mathrm{i}\Delta^2k_0\rho}\right|\leqslant\frac{\pi}{4} \tag{3-82}$$

若 p^* 记作

$$p^*=\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}\,\frac{k_0\ \sqrt{k_1^2-k_0^2}}{k_1^2}\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l\right)^2 \tag{3-83}$$

则

$$\mathrm{erfc}(\sqrt{-\mathrm{i}p^*})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{-\mathrm{i}p^*}}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\int_{p^*}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\mathrm{d}s}{\sqrt{2\pi s}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\boldsymbol{F}(p^*) \tag{3-84}$$

此处的 $F(p^*)$ 即为菲涅耳积分。

$$\boldsymbol{F}(p^*)=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})-\int_0^{p^*}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}t \tag{3-85}$$

虽然在割缝 Γ_1 两侧,γ_1 的幅角相差 180°,因为在式(3-64)至式(3-66)的被积函数中都同时出现了 $\gamma_1\tan\gamma_1 l$ 因子,而这个因子在割缝两侧是 γ_1 的偶函数,即在割缝两侧有相等的数值,因此 k_1 是被积函数的可消去支点,也就是说被积函数沿 Γ_1 的积分等于零。由此可得

$$B_{0\varphi}^{(3)}(\rho,z)=k_0^2\mu_0\sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\sum_j\frac{\gamma_1(\lambda_j^*)\tan(\gamma_1(\lambda_j^*)l)}{q'(\lambda_j^*)\gamma_0(\lambda_j^*)}(\lambda_j^*)^{\frac{3}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j^*)\cdot(z+d)+\mathrm{i}\lambda_j^*\rho}$$
$$-\frac{k_0^3\mu_0\ \sqrt{k_1^2-k_0^2}}{2k_1^2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot\tan(\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0r_2+\frac{\pi}{2})}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^*}\boldsymbol{F}(p^*) \tag{3-86}$$

同理可得

$$E_{0z}^{(3)}(\rho,z)=-\omega\mu_0\sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}e^{i\frac{3\pi}{4}}\sum_j\frac{\gamma_1(\lambda_j^*)\tan(\gamma_1(\lambda_j^*)l)}{q'(\lambda_j^*)\gamma_0(\lambda_j^*)}(\lambda_j^*)^{\frac{5}{2}}\cdot e^{i\gamma_0(\lambda_j^*)(z+d)+i\lambda_j^*\rho}$$
$$+\frac{\omega k_0^2\mu_0}{k_1^2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l\cdot e^{i(k_0r_2+\frac{\pi}{2})}\cdot e^{-ip^*}\boldsymbol{F}(p^*)\tag{3-87}$$

$$E_{0\rho}^{(3)}=-\omega\mu_0\sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}e^{i\frac{\pi}{4}}\sum_j\frac{\gamma_1(\lambda_j^*)\tan(\gamma_1(\lambda_j^*)l)}{q'(\lambda_j^*)}(\lambda_j^*)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{i\gamma_0(\lambda_j^*)(z+d)+i\lambda_j^*\rho}$$
$$+\frac{\omega k_0^2\mu_0}{2\pi k_1^2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot\tan(\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l)\cdot e^{ik_0r_2}$$
$$\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi k_0\sqrt{k_1^2-k_0^2}}{k_1^2}\cdot\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l\cdot e^{-ip^*}\boldsymbol{F}(p^*)\right]\tag{3-88}$$

式(3-86)至式(3-88)中的第一项都为被积函数中极点留数项的贡献，是吸附表面波项，其传播波数为极点方程式(3-67)的根，其值介于 k_0 和 k_1 之间。式(3-86)至式(3-88)中的第二项都为被积函数沿支点割缝积分的贡献，是侧面波项，其传播波数为空气中的传播波数 k_0。

至此，可以得到在理想导电基底情况下，垂直电偶极子在三层介质中激励的电磁场分量(空气一侧)完整的解析表达式。

$$B_{0\varphi}(\rho,z)=-\frac{\mu_0}{4\pi}e^{ik_0r_1}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{ik_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}\right)-\frac{\mu_0}{4\pi}e^{ik_0r_2}\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{ik_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\right)$$
$$+k_0^2\mu_0\sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}e^{i\frac{3\pi}{4}}\sum_j\frac{\gamma_1(\lambda_j^*)\tan(\gamma_1(\lambda_j^*)l)}{q'(\lambda_j^*)\gamma_0(\lambda_j^*)}(\lambda_j^*)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{i\gamma_0(\lambda_j^*)\cdot(z+d)+i\lambda_j^*\rho}$$
$$-\frac{k_0^3\mu_0\sqrt{k_1^2-k_0^2}}{2k_1^2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot\tan(\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l)\cdot e^{i(k_0r_2+\frac{\pi}{2})}\cdot e^{-ip^*}\boldsymbol{F}(p^*)\tag{3-89}$$

$$E_{0\rho}(\rho,z)=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}e^{ik_0r_1}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{ik_0}{r_1}-\frac{3}{r_1^2}-\frac{3i}{k_0r_1^3}\right)$$
$$-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}e^{ik_0r_2}\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{ik_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3i}{k_0r_2^3}\right)$$
$$-\omega\mu_0\sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}e^{i\frac{\pi}{4}}\sum_j\frac{\gamma_1(\lambda_j^*)\tan(\gamma_1(\lambda_j^*)l)}{q'(\lambda_j^*)}(\lambda_j^*)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{i\gamma_0(\lambda_j^*)(z+d)+i\lambda_j^*\rho}$$
$$+\frac{\omega k_0^2\mu_0}{2\pi k_1^2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot\tan(\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l)\cdot e^{ik_0r_2}$$
$$\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi k_0\sqrt{k_1^2-k_0^2}}{k_1^2}\cdot\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l\cdot e^{-ip^*}\boldsymbol{F}(p^*)\right]\tag{3-90}$$

$$E_{0z}(\rho,z)=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}e^{ik_0r_1}\left[\frac{ik_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}-\frac{i}{k_0r_1^3}-\left(\frac{z-d}{r_1}\right)^2\cdot\left(\frac{ik_0}{r_1}-\frac{3}{r_1^2}-\frac{3i}{k_0r_1^3}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}-\frac{\mathrm{i}}{k_0 r_2^3}-\left(\frac{z+d}{r_2}\right)^2\cdot\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0 r_2^3}\right)\right] \\
&-\omega\mu_0\sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\sum_j\frac{\gamma_1(\lambda_j^*)\tan(\gamma_1(\lambda_j^*)l)}{q'(\lambda_j^*)\gamma_0(\lambda_j^*)}(\lambda_j^*)^{\frac{5}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j^*)(z+d)+\mathrm{i}\lambda_j^*\rho} \\
&+\frac{\omega k_0^2\mu_0}{2k_1^2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 r_2+\frac{\pi}{2})}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^*}\boldsymbol{F}(p^*)
\end{aligned}
\tag{3-91}
$$

其中

$$r_1=\sqrt{\rho^2+(z-d)^2} \tag{3-92}$$

$$r_2=\sqrt{\rho^2+(z+d)^2} \tag{3-93}$$

在获得这些表达式时并没有对介质层的厚度加任何限制。式(3-89)至式(3-91)中含有 r_1 的项是直射波，含有 r_2 的项是理想反射波。

3.2.5　理想导电基底情况典型条件下的计算和讨论

(1)由场分量的解析表达式(3-86)至式(3-88)可以看出，它们的第一项是来自位于实轴上极点 λ_j^* 的留数的贡献。此时 $\gamma_0(\lambda_j^*)=\mathrm{i}\sqrt{\lambda_j^{*2}-k_0^2}$ 是正虚数，故因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}=\mathrm{e}^{-(z+d)\sqrt{\lambda_j^{*2}-k_0^2}}$ 是一个衰减因子。当场点或源点离开介质表面时，场分量沿 z 方向以指数规律衰减。而因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_j^*\rho}$ 是一个沿 ρ 方向传播的因子，它的传播波数介于 k_0 与 k_1 之间，在沿径向传播时，它的幅度以 $\rho^{-1/2}$ 规律衰减。这种波即是吸附表面波，它只有当场源距离介质层表面很近时才能有效地被激励，如果电偶极子离开介质表面有较大距离，则激励效率迅速以指数衰减。

(2)沿介质层表面传播的吸附表面波的传播波数除了与工作频率、介质层的传播波数 k_1 有关以外，还取决于介质层的厚度 l。由 3.2.4 节可知，这种波的传播波数明显不同于 k_0。因而可以预料，在介质层表面将会出现吸附表面波与传统意义上的侧面波相互干涉现象，场强将交替地出现极大值与极小值，这将被后面的计算所证明。

(3)若考虑文献[67]讨论的介质层较薄，满足 $k_1 l\leqslant 0.6$，且 $k_1^2\gg k_0^2$ 的情况，则可以发现本文中所得的场分量表达式(3-86)到(3-88)中第二项，即沿割缝 Γ_0 的贡献，与文献[67]所得的结果完全一致。此时

$$p^*\approx\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}k_0 l\right)^2\approx\frac{k_0 r_2}{2}\left(\frac{z+d+\varepsilon r_2}{\rho}\right)^2=p \tag{3-94}$$

式中：参数 ε 由文献[67]给出，$\varepsilon=-\mathrm{i}k_0 l$。

本章的 $B_{0\varphi}^{(3)}$ 中沿割缝 Γ_0 的贡献可简化为

$$-\frac{\mathrm{i}k_0^3 l\mu_0}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^*}\cdot F(p^*) \tag{3-95}$$

而文献[67]中第三项为

$$\frac{k_0^2 \varepsilon \mu_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{k_0 r_2}} e^{ik_0 r_2} e^{-i\rho} \cdot F(p) \tag{3-96}$$

考虑到 r_2 实际上与 ρ 非常接近，式(3-95)和式(3-96)是完全一致的。同样可以看出，本论文中 E_{0z} 和 $E_{0\rho}$ 的表达式中来自割缝 Γ_0 的贡献项与文献[67]中对应的侧面波项完全一致。

(4)在中间介质层有损耗的情况下，即 k_1 不是一个纯实数，而是有一个小的正虚部，此时极点方程式(3-67)的解不再位于实轴上，而是有一个正虚部。若介质损耗不大，可以先忽略介质的损耗，由极点方程式(3-67)先求出极点位置的初始近似值，然后用牛顿迭代法对有损耗时的极点方程式(3-67)精确求解。由 3.2.3 节可知，其实部随介质层厚度的变化与无损耗时一样，由于 λ_j^* 有一个正虚部，则此时沿介质层表面传播的吸附表面波应有一个附加的衰减因子。

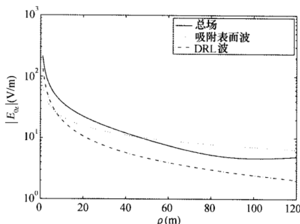


图 3-7 当 $k_1 l = 0.4$ 时，E_{0z} 的各分量随距离 ρ 的变化：$f = 100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1} = 2.85$

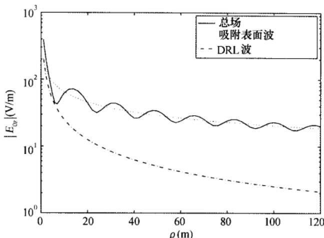


图 3-8 当 $k_1 l = 1.4$ 时，E_{0z} 的各分量随距离 ρ 的变化：$f = 100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1} = 2.85$

(5)如图 3-7 和图 3-8 所示，分别给出了当 $k_1 l=0.4$ 和 $k_1 l=1.4$ 时源点和场点都位于介质表面的情况下电场分量 E_{0z} 随传播距离的变化关系曲线。需要说明的是，图 3-7 和图 3-8 的"吸附表面波"表示式(3-87)中的第一项吸附表面波，即极点留数项对应的波，它以波数 λ_1^* 向外传播。"DRL 波"项表示式(3-87)中的最后一项侧面波与式(3-57)直射波及式(3-58)反射波三项之和，它们都以空气中波数 k_0 向外传播。"总场"表示直射波、理想反射波、吸附表面波和侧面波的总叠加。在图 3-7 中，由于介质层厚度较薄，与 k_0 很接近，故总场中看不出明显的干涉现象。而图 3-8 中由于介质层较厚，能看出总场中有明显的干涉现象。如果介质层厚度继续增加，表面波项将有不止一个传播模式，干涉现象将更加复杂。

3.3 非理想导电基底情况下垂直电偶极子激励的电磁场

3.3.1 表面波和侧面波的积分表达式

在非理想导电基底条件下，图 3-1 中的 k_2 是比较大的有限值，则根据空气中的电磁场分量的积分表达式(3-42)至式(3-44)可以写成如下形式：

$$B_{0\varphi}(\rho,z)=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi}\int_0^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}-(Q+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\right]\gamma_0^{-1}J_1(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{3-97}$$

$$E_{0\rho}(\rho,z)=\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\left[\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}-(Q+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\right]J_1(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{3-98}$$

$$E_{0z}(\rho,z)=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}-(Q+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\right]\gamma_0^{-1}J_0(\lambda\rho)\lambda^3\mathrm{d}\lambda \tag{3-99}$$

反射系数是

$$Q=-\frac{\dfrac{\gamma_0}{k_0^2}-\dfrac{\gamma_2}{k_2^2}-\mathrm{i}\left(\dfrac{\gamma_0}{k_0^2}\dfrac{\gamma_2}{k_2^2}\dfrac{k_1^2}{\gamma_1}-\dfrac{\gamma_1}{k_1^2}\right)\tan\gamma_1 l}{\dfrac{\gamma_0}{k_0^2}+\dfrac{\gamma_2}{k_2^2}-\mathrm{i}\left(\dfrac{\gamma_0}{k_0^2}\dfrac{\gamma_2}{k_2^2}\dfrac{k_1^2}{\gamma_1}+\dfrac{\gamma_1}{k_1^2}\right)\tan\gamma_1 l} \tag{3-100}$$

其中

$$\gamma_j=\sqrt{k_j^2-\lambda^2},\quad j=0,1,2 \tag{3-101}$$

仿照 3.2.1 节中的步骤，式(3-97)至式(3-99)可改写为

$$B_{0\varphi}(\rho,z)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}\right)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\right]+B_{0\varphi}^{(3)} \tag{3-102}$$

$$E_{0\rho}(\rho,z)=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{3}{r_1^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0 r_1^3}\right)\right.$$
$$\left.+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0 r_2^3}\right)\right]+E_{0\rho}^{(3)} \tag{3-103}$$

$$E_{0z}(\rho,z)=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\left[\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}-\frac{\mathrm{i}}{k_0 r_1^3}-\left(\frac{z-d}{r_1}\right)^2\cdot\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{3}{r_1^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0 r_1^3}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}-\frac{\mathrm{i}}{k_0 r_2^3}-\left(\frac{z+d}{r_2}\right)^2\cdot\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0 r_2^3}\right)\right]\right\}+E_{0z}^{(3)} \tag{3-104}$$

其中

$$r_1=[\rho^2+(z-d)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{3-105}$$

$$r_2=[\rho^2+(z+d)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{3-106}$$

式(3-102)至式(3-103)中的最后一项包括侧面波项和表面波项,其积分表达式可表示为

$$B_{0\varphi}^{(3)}=-\frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\lambda)H_1^{(1)}(\lambda\rho)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}}{q(\lambda)\gamma_0}\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{3-107}$$

$$E_{0\rho}^{(3)}=-\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\lambda)H_1^{(1)}(\lambda\rho)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}}{q(\lambda)}\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{3-108}$$

$$E_{0z}^{(3)}=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\lambda)H_0^{(1)}(\lambda\rho)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}}{q(\lambda)}\lambda^3\mathrm{d}\lambda \tag{3-109}$$

其中

$$q(\lambda)=\frac{\gamma_0}{k_0^2}+\frac{\gamma_2}{k_2^2}-\mathrm{i}\left(\frac{\gamma_0}{k_0^2}\frac{\gamma_2}{k_2^2}\frac{k_1^2}{\gamma_1}+\frac{\gamma_1}{k_1^2}\right)\tan\gamma_1 l \tag{3-110}$$

$$A(\lambda)=-\frac{\gamma_2}{k_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{\gamma_1}{k_1^2}\tan\gamma_1 l \tag{3-111}$$

3.3.2 极点方程的根的求解

要获得电磁场分量的完整的解析解,就必须求解式(3-107)至式(3-109)中的三个积分。考虑到在实际问题中场点往往离源点的水平距离较远,即 $k_0\rho\gg1$,而一般更关心的是靠近介质表面的传播特性,因此 $k_0(z+d)$ 可理解为不太大。又因这三个被积函数式中都包含有振荡的贝塞尔函数,故若沿实轴直接数值积分,则收敛速度将会很慢且不易得到精确的结果。现在我们试图用解析方法对式(3-107)至式(3-109)中的三个积分进行估值。和 3.2.2 节相类似,我们可以得到如下极点方程:

$$q(\lambda)=\frac{\gamma_0}{k_0^2}+\frac{\gamma_2}{k_2^2}-\mathrm{i}\left(\frac{\gamma_0}{k_0^2}\frac{\gamma_2}{k_2^2}\frac{k_1^2}{\gamma_1}+\frac{\gamma_1}{k_1^2}\right)\tan\gamma_1 l=0 \tag{3-112}$$

当 $k_2\to\infty$ 时,方程式(3-112)即退化为理想导电基底情况下的极点方程式(3-

67)，其根的分布已在3.2.3节中讨论过。现在我们进一步分析，当 k_2 是有限值时，极点位置将有何种变化。

若记 $s=k_0/k_2$，它是表征导电基底电磁性质的一个参数。当导电基底是理想导体时，$s=0$；若不是理想导体，则它是一个幅度小于1、相位在0°与−45°之间的复数。以 $k_2=k_0/s$ 代入式(3-112)，则极点方程式(3-112)可改写为

$$q(s,\lambda)=\frac{\gamma_0}{k_0^2}+\frac{s\sqrt{1-\dfrac{s^2\lambda^2}{k_0^2}}}{k_0}-\mathrm{i}\left[\frac{\gamma_0 s k_1^2\sqrt{1-\dfrac{s^2\lambda^2}{k_0^2}}}{\gamma_0 k_0^3}+\frac{\gamma_1}{k_1^2}\right]\cdot\tan\gamma_1 l=0 \tag{3-113}$$

当导电基底参数 s 发生变化时，方程(3-112)的根也发生了相应的变化。故对方程式(3-113)两端的 s 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}q(s,\lambda)}{\mathrm{d}s}=g(\lambda,s)-f(\lambda,s)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}=0 \tag{3-114}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}=\frac{g(\lambda,s)}{f(\lambda,s)} \tag{3-115}$$

其中

$$g(\lambda,s)=\frac{\left(1-\dfrac{2s^2\lambda^2}{k_0^2}\right)\left(1-\dfrac{\mathrm{i}\gamma_0 k_1^2}{k_0^2\gamma_1}\tan\gamma_1 l\right)}{k_0\sqrt{1-\dfrac{s^2\lambda^2}{k_0^2}}} \tag{3-116}$$

$$\begin{aligned}f(\lambda,s)=&\frac{\lambda}{k_0^2}\left[\frac{1}{\gamma_0}+\frac{s^3}{k_0\sqrt{1-\dfrac{s^2\lambda^2}{k_0^2}}}\right]\\&-\frac{\mathrm{i}\lambda\tan\gamma_1 l}{\gamma_1}\cdot\left[\frac{s^3\gamma_0 k_1^2}{k_0^5\sqrt{1-\dfrac{s^2\lambda^2}{k_0^2}}}+\frac{1}{k_1^2}+\frac{s\sqrt{1-\dfrac{s^2\lambda^2}{k_0^2}}\cdot k_1^2\cdot(k_1^2-k_0^2)}{\gamma_0\gamma_1^2 k_0^3}\right]\\&-\frac{\mathrm{i}\lambda l}{\gamma_1}\sec^2\gamma_1 l\cdot\left[\frac{\gamma_1}{k_1^2}+\frac{\gamma_0 s\sqrt{1-\dfrac{s^2\lambda^2}{k_0^2}}\cdot k_1^2}{\gamma_1 k_0^3}\right]\end{aligned} \tag{3-117}$$

当 $k_2\to\infty$，即 $s=0$ 时，可求出第 j 个极点为 λ^*（详见3.2.2），故当 k_2 为有限值时，极点位置可由式(3-115)积分求得，即

$$\lambda_j=\lambda_j^*+\int_0^{k_0/k_2}\frac{g(\lambda,s)}{f(\lambda,s)}\mathrm{d}s \tag{3-118}$$

在式(3-118)的积分中，积分路径应取在第四象限，而根式函数 γ_0、γ_1 及 $\sqrt{1-s^2\lambda^2/k_0^2}$ 应满足条件

$$-\frac{\pi}{4}\leqslant\arg\gamma_j<\frac{3\pi}{4} \tag{3-119}$$

非理想导电基底情况下极点的位置 λ_j 除了从式(3-118)通过数值积分求出外，

还可直接从方程式(3-115)中用牛顿迭代法求得,其初始值取为理想导电基底情况下对应的极点 λ_j^* 。

3.3.3 极点方程的根的变化规律

前面已经讨论过,当导电基底是理想导体时,如果介质层是无损耗的介质,则吸附表面波的传播波数是一个纯实数,不含有虚数部分,所以沿径向传播时没有吸收衰减因子。如果介质层是有损耗的介质,则吸附表面波的传播波数就不再是一个纯实数,而是一个含有虚数部分的复数,复数的虚数部分即是一个吸收衰减因子。现在讨论导电基底是非理想导体且介质层是无损耗介质的情况。假设工作频率为 $f=100\text{MHz}$,介质层的介电系数为 $\varepsilon_{r1}=2.65$,将导电基底分成良导体和弱导体两种情况,分别给出这两种情况下场分量表达式中被积函数的极点的实部和虚部随介质层厚度的变化规律(见图 3-9(a)和(b))。

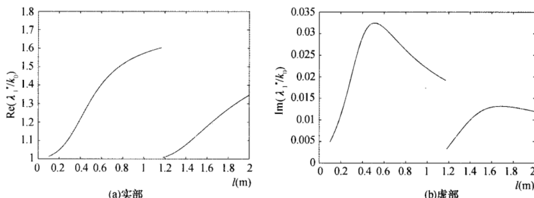


图 3-9 导电基底是良导体时的极点方程的第一个根:$f=100\text{MHz}$,$\varepsilon_{r1}=2.85$,$\varepsilon_{r2}=80$,$\sigma_2=4\text{S/m}$

图 3-9(a)和(b)分别给出了导电基底是良导体和弱导体两种情况下极点的变化规律。其中良导体的介电系数和电导率取为 $\varepsilon_{r2}=80.0$,$\sigma_2=4.0$。从图中可看出,当导电基底不是理想导体时,吸附表面波沿表面传播将有一个衰减因子。衰减因子将随 σ_2 的不同而有很大的变化,而随介质厚度的变化在 $k_1 l\in(0,\pi/2)$ 区间内不是单调变化的。

3.3.4 非理想导电基底情况下三层介质中场分量的完整表达式

前面已经对理想导电基底 $k_2\to\infty$ 的特殊情况进行了分析。所得结果表明,在空气中的场由直射波、反射波、侧面波和吸附表面波四部分组成,其中吸附表面波来源于积分表达式(3-64)至式(3-66)中极点留数的贡献,而侧面波来源于沿割缝 Γ_0 积分的贡献。当 k_2 为有限值时,即非理想导电基底情况,可以预料这些结论仍然定性地

成立。极点方程式(3-112)解出后，就得到了在非理想导电基底情况下的场分量积分表达式中的被积函数的极点。当极点位置求出后，由极点留数产生的吸附表面波的各场分量分别表示为

$$
\begin{aligned}
B_{0\varphi}^{sur} &= -\frac{\mu_0}{2}\sum_j \frac{A(\lambda_j)\lambda_j^2 e^{i\gamma_0(z+d)}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)} H_1^{(1)}(\lambda_j\rho) \\
&\approx \frac{\mu_0}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_j \frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)} e^{i\gamma_0(\lambda_j)(z+d)+i\lambda_j\rho}
\end{aligned} \tag{3-120}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{0\rho}^{sur} &= -\frac{\omega\mu_0}{2k_0}\sum_j \frac{A(\lambda_j)\lambda_j^2 e^{i\gamma_0(\lambda_j)(z+d)}}{q'(\lambda_j)} H_1^{(1)}(\lambda_j\rho) \\
&\approx \frac{\omega\mu_0 e^{i\frac{\pi}{4}}}{2k_0^2}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sum_j \frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{3/2}}{q'(\lambda_j)} e^{i\gamma_0(\lambda_j)(z+d)+i\lambda_j\rho}
\end{aligned} \tag{3-121}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{0z}^{sur} &= -\frac{i\omega\mu_0}{2k_0^2}\sum_j \frac{A(\lambda_j) e^{i\gamma_0(\gamma_j)\cdot(z+d)}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)} \lambda_j^3 H_0^{(1)}(\lambda_j\rho) \\
&\approx -\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2} e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sum_j \frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{5/2}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)} e^{i\gamma_0(\lambda_j)(z+d)+i\lambda_j\rho}
\end{aligned} \tag{3-122}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
q'(\lambda_0) = &-\lambda\left(\frac{1}{k_0^2\gamma_0}+\frac{1}{k_2^2\gamma_2}\right) + i\lambda\tan\gamma_1 l \cdot \left[\frac{1}{k_1^2\gamma_1}+\frac{k_1^2}{k_0^2k_2^2}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1\gamma_0}+\frac{\gamma_0}{\gamma_1\gamma_2}-\frac{\gamma_0\gamma_2}{\gamma_1^3}\right)\right] \\
&+ i\frac{\lambda l}{\gamma_1}\sec^2\gamma_1 l \cdot \left[\frac{k_1^2}{k_0^2k_2^2}\frac{\gamma_0\gamma_2}{\gamma_1}+\frac{\gamma_1}{k_1^2}\right]
\end{aligned} \tag{3-123}
$$

式(3-120)至式(3-122)中和式表示对所有极点留数求和，极点的个数与介质层厚度有关。一般地，若 $n\pi \leqslant k_1 l < (n+1)\pi$，则应有 $(n+1)$ 个极点。

当 k_2 为有限值时，积分表达式(3-107)至式(3-109)中的被积函数除了极点以外还有根式因子 γ_0、γ_1 和 γ_2，所以被积函数的支点除了与理想导电基底情况相同的两个 $\lambda=k_0$ 和 $\lambda=k_1$ 外，还多了一个 $\lambda=k_2$。与理想导电基底情况一样，$\lambda=k_1$ 也是可消去支点。为了将根式函数 γ_0 和 γ_2 分解成单值分支，在 λ 的复平面上取平行于虚轴的两个割缝，被积函数的极点和割缝如图 3-10 所示。

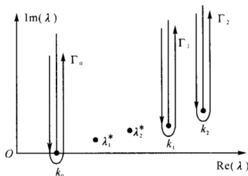


图 3-10　被积函数在复平面上的极点和割缝

图 3-10 中没有在 k_1 处取割缝，是由于被积函数中 $q'(\lambda)$ 和 $A(\lambda)$ 对 γ_1 是偶函数。故 k_1 是可消去极点，即沿 Γ_1 的积分为 0，所以仅需考虑沿 Γ_0 和 Γ_2 两个割缝的贡献。这两个割缝的端点分别为 k_0 和 k_2，在以 k_0 为端点的割缝 Γ_0 两侧 γ_0 的幅角彼此相差 180°，γ_1 和 γ_2 的幅角保持不变。而在以 k_2 为端点的割缝 Γ_2 两侧，则 γ_2 的幅角却彼此相差 180°，而 γ_1 和 γ_0 幅角保持不变。

考虑到 k_2 是导电基底中的传播波数，有一个正虚部，故 $H_1^{(1)}(\lambda\rho)$ 沿 Γ_2 将有一个大的指数衰减因子，这在物理上即理解为从源点经导电基底中传播到场点的能量是可忽略的。因此，沿 Γ_2 的积分事实上也可以忽略不计。下面我们具体计算沿割缝 Γ_0 积分的贡献。在上面的规定下，由复变函数理论可知，式(3-107)沿割缝的积分可表示为

$$B_{0\varphi}^{l}=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{A(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}}{q(\lambda)\gamma_0}H_1^{(1)}(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{3-124}$$

在 Γ_0 两侧，取

$$\lambda=k_0(1+\mathrm{i}\tau^2) \tag{3-125}$$

此时

$$H_1^{(1)}(\lambda\rho)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0\rho-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\mathrm{e}^{-k_0\rho\tau^2} \tag{3-126}$$

显然，因为 $k_0\rho\gg1$，积分将主要集中在靠近支点 k_0 附近，此时

$$\gamma_0=\sqrt{k_0^2-\lambda^2}\approx k_0\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\tau \tag{3-127}$$

在 Γ_0 左侧，τ 从 $-\infty$ 变至 0；在右侧，τ 从 0 增至 $+\infty$，故 γ_0 的相位在左侧是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$，在右侧近似于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$。在支点附近，应有

$$\gamma_1=\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\approx\sqrt{k_1^2-k_0^2}=\gamma_1^* \tag{3-128}$$

$$\gamma_2=\sqrt{k_2^2-\lambda^2}\approx\sqrt{k_2^2-k_0^2}=\gamma_2^* \tag{3-129}$$

将式(3-125)至式(3-129)代入式(3-124)，化简后可得

$$B_{0\varphi}^{l}=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi}\exp\left\{\mathrm{i}k_0\rho\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)^2\right]-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\right\}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot k_0^2\frac{A}{q_0}\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left\{-k_0\rho\left[\tau+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)\right]^2\right\}}{\tau+c}\mathrm{d}\tau \tag{3-130}$$

其中

$$A=\frac{-\gamma_2^*}{k_2^2}+\mathrm{i}\frac{-\gamma_1^*}{k_1^2}\tan\gamma_1^*l \tag{3-131}$$

$$q_0=\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}{k_0}\left(1-\mathrm{i}\frac{k_1^2\gamma_2^*}{k_2^2\gamma_1^*}\tan\gamma_1^*l\right) \tag{3-132}$$

$$c=-\frac{A}{q_0} \tag{3-133}$$

考虑到

$$r_2=[\rho^2+(z+d)^2]^{\frac{1}{2}}\approx\rho\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)^2\right] \tag{3-134}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left\{-k_0\rho\left[\tau+\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)\right]^2\right\}}{\tau+c}d\tau\\
&=i\pi\exp\left\{-k_0\rho\left[c-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)\right]^2\right\}\cdot\mathrm{erfc}\left\{\sqrt{-k_0\rho\left[c-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)\right]^2}\right\}\\
&=\sqrt{2}\pi e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-iP^*}F(P^*)
\end{aligned} \tag{3-135}$$

其中

$$P^*=\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\frac{\frac{\gamma_2^*k_0}{k_2^2}-i\frac{\gamma_1^*k_0}{k_1^2}\tan\gamma_1^*l}{1-i\frac{k_1^2\gamma_2^*}{k_2^2\gamma_1^*}\tan\gamma_1^*l}\right)^2 \tag{3-136}$$

$$F(P^*)=\frac{1}{2}(1+i)-\int_0^{P^*}\frac{e^{it}}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}}dt \tag{3-137}$$

$F(P^*)$是菲涅耳积分。令

$$\varepsilon^*=\frac{\frac{k_0\gamma_2^*}{k_2^2}-i\frac{k_0\gamma_1^*}{k_1^2}\tan\gamma_1^*l}{1-i\frac{k_1^2\gamma_2^*}{k_2^2\gamma_1^*}\tan\gamma_1^*l} \tag{3-138}$$

则式(3-130)化简后可得

$$B_{0\varphi}^l=\frac{\mu_0k_0^2}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\varepsilon^*e^{ik_0r_2}e^{-iP^*}F(P^*) \tag{3-139}$$

同理可求得

$$E_{0z}^l=\frac{-\omega\mu_0k_0}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\varepsilon^*e^{ik_0r_2}e^{-iP^*}F(P^*) \tag{3-140}$$

$$E_{0\rho}^l=\frac{i\omega\mu_0k_0}{2\pi}\varepsilon^*e^{ik_0r_2}\left[\frac{1}{k_0\rho}+i\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\varepsilon^*e^{-iP^*}F(P^*)\right] \tag{3-141}$$

式(3-120)至式(3-122)即为非理想导电基底情况下的侧面波表达式。到此，在非理想导电基底情况下，垂直电偶极子在空气中激励的电磁场分量的完整表达式就可以写出了，它们也是由直射波、反射波、吸附表面波和侧面波的叠加而成，即

$$\begin{aligned}
B_{0\varphi}=&-\frac{\mu_0}{4\pi}e^{ik_0r_1}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{ik_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}\right)-\frac{\mu_0}{4\pi}e^{ik_0r_2}\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{ik_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\\
&+\frac{\mu_0}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}e^{i\frac{\pi}{4}}\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)}e^{i\gamma_0(\lambda_j)(z+d)+i\lambda_j\rho}
\end{aligned}$$

$$+\frac{\mu_0 k_0^2}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\varepsilon^* e^{ik_0r_2}e^{-iP^*}F(P^*) \tag{3-142}$$

$$E_{0\rho}=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}e^{ik_0r_1}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{ik_0}{r_1}-\frac{3}{r_1^2}-\frac{3i}{k_0r_1^3}\right)$$
$$-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}e^{ik_0r_2}\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{ik_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3i}{k_0r_2^3}\right)$$
$$+\frac{\omega\mu_0 e^{i\frac{\pi}{4}}}{2k_0^2}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)}e^{i\gamma_0(\lambda_j)(z+d)+i\lambda_j\rho}$$
$$+\frac{i\omega\mu_0 k_0}{2\pi}\varepsilon^* e^{ik_0r_2}\cdot\left[\frac{1}{k_0\rho}+i\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\varepsilon^* e^{-iP^*}F(P^*)\right] \tag{3-143}$$

$$E_{0z}=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}e^{ik_0r_1}\left[\frac{ik_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}-\frac{i}{k_0r_1^3}-\left(\frac{z-d}{r_1}\right)^2\cdot\left(\frac{ik_0}{r_1}-\frac{3}{r_1^2}-\frac{3i}{k_0r_1^3}\right)\right]$$
$$+\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}e^{ik_0r_2}\left[\frac{ik_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}-\frac{i}{k_0r_2^3}-\left(\frac{z+d}{r_2}\right)^2\cdot\left(\frac{ik_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3i}{k_0r_2^3}\right)\right]$$
$$-\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{5}{2}}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)}e^{i\gamma_0(\lambda_j)(z+d)+i\lambda_j\rho}$$
$$-\frac{\omega\mu_0 k_0}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\varepsilon^* e^{ik_0r_2}e^{-iP^*}F(P^*) \tag{3-144}$$

3.3.5 非理想导电基底情况典型条件下的计算和讨论

现在开始讨论在典型情况下的一些实例。首先将本论文得到的结果与 King[67] 所得到的结果进行比较。因为本文在对问题进行研究时，并没有对介质层的厚度加以任何限制，所以现在主要在文献[67]中所给定的条件下进行讨论。当满足条件 $k_1l\leqslant 0.6$ 时，应有

$$\gamma_1^*=\sqrt{k_1^2-k_0^2}\approx k_1 \tag{3-144}$$
$$\gamma_2^*=\sqrt{k_2^2-k_0^2}\approx k_2 \tag{3-145}$$
$$\tan\gamma_1^* l\approx k_1 l \tag{3-146}$$

故有

$$\varepsilon^*=\frac{\dfrac{k_0\gamma_2^*}{k_2^2}-i\dfrac{\gamma_1^* k_0}{k_1^2}\tan\gamma_1^* l}{1-i\dfrac{k_1^2\gamma_2^*}{k_2^2\gamma_1^*}\tan\gamma_1^* l}\approx\frac{k_0}{k_2}-ik_0 l \tag{3-147}$$

与文献[67]中所给定的参数 ε 相一致，且

$$P^*=\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\frac{\dfrac{\gamma_2^* k_0}{k_2^2}-i\dfrac{\gamma_1^* k_0}{k_1^2}\tan\gamma_1^* l}{1-i\dfrac{k_1^2\gamma_2^*}{k_2^2\gamma_1^*}\tan\gamma_1^* l}\right)^2=\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d+\varepsilon\rho}{\rho}\right)^2=P \tag{3-148}$$

也与文献[67]中所给定的参数 P 相一致，故本文中的侧面波项式(3-120)至式(3-122)与文

献[67]中的对应项完全一致。在 γ_2^* 与 γ_1^* 不能用 k_2 和 k_1 代替的情况下，本章的结果将更精确一些。

除了侧面波以外，介质表面应存在吸附表面波，在文献[67]中没有考虑。当导电基底不是理想导体时，吸附表面波沿表面传播将有一个衰减因子。衰减因子将随 σ_2 的不同而有很大的变化，而随介质厚度的变化在 $k_1 l \in (0,\pi/2)$ 区间内也不是单调变化的。吸附表面波的传播波数随着介质层厚度的变化规律在 3.3.3 节已介绍过，从中可以看出，本文所得到的吸附表面波也不是 Wait 在评论[68]中所提到的那一种吸附表面波。本章所得到的吸附表面波的传播波数既不是空气中的波数 k_0，也不是介质层中的波数 k_1，而是随着介质层厚度变化的一个波数 λ_j，λ_j 可由被积函数的极点方程求出。

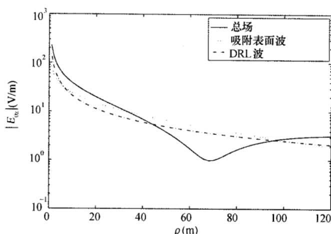


图 3-11　E_{0z} 随传播距离的变化：$k_1 l=0.4$

如图 3-11 所示，场分量 E_{0z} 及其各分量的幅度在沿介质表面传播时随传播距离的变化规律。计算所采用的参数为：$\varepsilon_{r2}=80$，$\sigma_2=4\text{S/m}$，$z=d=0\text{m}$，$f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.85$。需要说明的是，其中的“DRL 波”表示直射波、反射波和侧面波的叠加。从图 3-11 至图 3-13 可看出，吸附表面波受导电基底的电导率影响较大，吸收衰减因子随电导率的减小而增加。

吸附表面波的传播波数受介质层厚度的影响较大，随着介质层厚度的增加，其波数离开 k_0 越来越远，所以干涉现象越来越明显，干涉波长越来越短，而侧面波的传播波数却不受介质层厚度的影响。

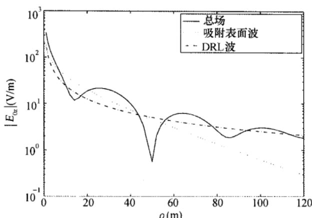


图 3-12 E_{0z}随传播距离的变化规律：$k_1 l=0.9$

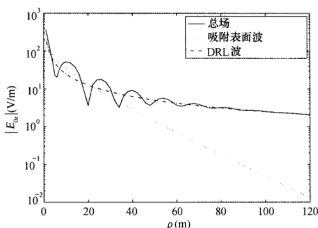


图 3-13 E_{0z}随传播距离的变化规律：$k_1 l=1.4$

3.4 三层介质中的垂直偶极子产生的辐射场

3.3.4 节介绍三层介质中的垂直偶极子激励的电磁场分量的解析表达式，本节将在此基础上进一步研究辐射问题。

3.4.1 三层介质中的垂直偶极子产生的辐射场

现在需要进一步推导球坐标系下的远区场。当满足远区条件 $k_0\rho\gg1$ 时，我们可以知道条件$|P^*|\geqslant4$ 成立，菲涅耳积分可近似表示为

$$P^* = \frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\varepsilon^*\right)^2 \tag{3-149}$$

$$T^* = k_0^2\varepsilon^* \cdot \sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}P^*} F(P^*)$$
$$\rightarrow \frac{\mathrm{i}k_0\rho}{\rho^2} \cdot \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon^* + \frac{(z+d)}{\rho}} + \frac{\varepsilon^*}{\rho^2}\left[\frac{1}{\varepsilon^* + \frac{(z+d)}{\rho}}\right]^3 \tag{3-150}$$

将式(3-149)和式(3-150)代入式(3-142)至式(3-144)，远区场可以简化成：

$$B_{0\varphi}^r(\rho,z) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_1} \cdot \frac{\mathrm{i}k_0\rho}{r_1^2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_2}\left(\frac{\mathrm{i}k_0\rho}{r_2^2} - 2T^*\right)\right]$$
$$+\frac{\mu_0}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sum_j \frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j)(z+d)+\mathrm{i}\lambda_j\rho} \tag{3-151}$$

$$E_{0\rho}^r(\rho,z) = -\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0} \cdot \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_1}\left(\frac{\mathrm{i}k_0\rho}{r_1^2}\right)\left(\frac{z-d}{r_1}\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_2}\left[\frac{\mathrm{i}k_0\rho}{r_2^2}\left(\frac{z+d}{r_2} - \frac{r_2^2}{\rho^2}\cdot 2\varepsilon^*\right) + 2\varepsilon^* T^*\right]\right\}$$
$$+\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sum_j \frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j)(z+d)+\mathrm{i}\lambda_j\rho} \tag{3-152}$$

$$E_{0z}(\rho,z) = \frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0} \cdot \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_1}\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}\right)\left(\frac{\rho}{r_1}\right)^2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_2}\left[\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}\left(\frac{\rho}{r_2}\right)^2 - 2T^*\right]\right\}$$
$$-\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sum_j \frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{5}{2}}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j)(z+d)+\mathrm{i}\lambda_j\rho} \tag{3-153}$$

在球坐标下，有如下关系式：

$$r_0 = \sqrt{\rho^2+z^2},\ \sin\Theta = \frac{\rho}{r_0},\ \cos\Theta = \frac{z}{r_0} \tag{3-154}$$

由于 $d^2 \ll r_0^2$，因此对相位而言，必须取近似 $r_1 \sim r_0 - d\cos\Theta$，$r_2 \sim r_0 + d\cos\Theta$；对幅度而言，可以取近似 $r_1 \sim r_2 \sim r_0$。于是，式(3-152)至式(3-154)可以简化为

$$B_{0\varphi}^r(r_0,\Theta) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_0}\left\{\frac{\mathrm{i}k_0\sin\Theta}{r_0}\left[\cos(k_0d\cos\Theta)\cdot\frac{\sin\Theta\left(\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)-\varepsilon^*\cos^2\Theta}{\sin\Theta\left(\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)+\varepsilon^*\sin^2\Theta}\right.\right.$$
$$\left.-\mathrm{i}\sin(k_0d\cos\Theta)\cdot\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon^*\sin^2\Theta+\sin\Theta\left(\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)}\right]$$
$$\left.-\frac{\varepsilon^*}{r_0^2\sin^2\Theta}\cdot\left[\frac{\sin\Theta}{\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}}\right]^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0d\cos\Theta}\right\} \tag{3-155}$$

$$E_{0\rho}^r(r_0,\Theta) = -\frac{\omega\mu_0}{2\pi k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_0}\left\{\frac{\mathrm{i}k_0}{r_0\sin\Theta\left(\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)}\left(\cos(k_0d\cos\Theta)\right.\right.$$
$$\cdot\left[\varepsilon^*\sin^3\Theta\cos\Theta+(\sin^2\Theta\cos\Theta-\varepsilon^*)\left(\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)\right]+\mathrm{i}\sin(k_0d\cos\Theta)$$

$$\cdot\left[\left(\frac{d}{r_0}\sin^2\Theta-\varepsilon^*\right)\left(\frac{d}{r_0}+\cos\Theta\right)+\frac{d}{r_0}\varepsilon^*\sin^3\Theta\right]\Bigg]$$

$$+\frac{\varepsilon^{*2}}{r_0^2\sin^2\Theta}\cdot\left[\frac{\sin\Theta}{\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}}\right]^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 d\cos\Theta}\Bigg\} \tag{3-156}$$

$$E_{0z}^r(r_0,\Theta)=\frac{\omega\mu_0}{2k_0\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_0}\Bigg\{\frac{\mathrm{i}k_0}{r_0\sin\Theta(\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0})}\cdot\Big[\cos(k_0d\cos\Theta)\sin\Theta$$

$$\cdot\left(\varepsilon^*\sin^3\Theta+\sin^2\Theta\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\sin^2\Theta-\varepsilon^*\right)-\mathrm{i}\varepsilon^*\sin\Theta\sin(k_0d\cos\Theta)\Big]$$

$$-\frac{\varepsilon^*}{r_0^2\sin^2\Theta}\left[\frac{\sin\Theta}{\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}}\right]^3\Bigg\}-\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\sin\Theta}}$$

$$\cdot\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{5}{2}}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j)(r_0\cos\Theta+d)+\mathrm{i}\lambda_jr_0\sin\Theta} \tag{3-157}$$

通过以下的关系式，我们可以得到球坐标系下的电磁场分量为

$$B_{0\Phi}^r(r_0,\Theta)=B_{0\varphi}^r(r_0,\Theta) \tag{3-158}$$

$$E_{\Theta}^r(r_0,\Theta)=E_{0\rho}^r(r_0,\Theta)\cos\Theta-E_{0z}^r(r_0,\Theta)\sin\Theta \tag{3-159}$$

$$E_{0r}^r(r_0,\Theta)=E_{0\rho}^r(r_0,\Theta)\sin\Theta+E_{0z}^r(r_0,\Theta)\cos\Theta \tag{3-160}$$

将式(3-156)和式(3-157)代入式(3-159)和式(3-160)，经过复杂的代数运算，可得

$$E_{0\Theta}^r(r_0,\Theta)=-\frac{\omega\mu_0}{2\pi k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_0}\Bigg\{\frac{\mathrm{i}k_0\cos(k_0d\cos\Theta)}{r_0\sin\Theta(\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta+d/r_0)}\Big[\varepsilon^*\sin^3\Theta+\sin^2\Theta\cos\Theta$$

$$-\varepsilon^*+\frac{d}{r_0}(\sin^2\Theta-\varepsilon^*\cos\Theta)\Big]+\frac{\mathrm{i}k_0[\mathrm{i}\sin(k_0d\cos\Theta)]\cos\Theta}{r_0\sin\Theta(\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta+d/r_0)}$$

$$\cdot\left[\frac{d}{r_0}\varepsilon^*\sin^3\Theta+\frac{d}{r_0}\sin^2\Theta\cos\Theta+\left(\frac{d}{r_0}\right)^2\sin^2\Theta-\varepsilon^*-\frac{d}{r_0}\varepsilon^*\right]$$

$$+\frac{\varepsilon^*}{r_0^2\sin^2\Theta}\left[\frac{\sin\Theta}{\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}}\right]^3\cdot(\varepsilon^*\cos\Theta-\sin\Theta)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0d\cos\Theta}\Bigg\}$$

$$+\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\sin\Theta}}\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)}\cdot\left[\cos\Theta+\frac{\lambda_j}{\gamma_0(\lambda_j)}\sin\Theta\right]$$

$$\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j)(r_0\cos\Theta+d)+\mathrm{i}\lambda_jr_0\sin\Theta} \tag{3-161}$$

$$E_{0r}^r(r_0,\Theta)=-\frac{\omega\mu_0}{2k_0\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_0}\Bigg\{-\frac{\mathrm{i}k_0\varepsilon^*\cdot\dfrac{d}{r_0}\cdot\cos(k_0d\cos\Theta)}{r_0(\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0})}$$

$$-\frac{k_0\sin(k_0d\cos\Theta)\left[\dfrac{d}{r_0}\varepsilon^*\sin^3\Theta+(\dfrac{d}{r_0}\sin^2\Theta-\varepsilon^*)\cos\Theta-\varepsilon^*\dfrac{d}{r_0}\right]}{r_0(\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0})}$$

$$+\frac{\varepsilon^*}{r_0^2\sin^2\Theta}\left|\frac{\sin\Theta}{\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}}\right|^3\cdot(\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta)\cdot e^{ik_0 d\cos\Theta}\Bigg\}$$

$$+\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\sin\Theta}}\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)}$$

$$\cdot\left[\sin\Theta-\frac{\lambda_j}{\gamma_0(\lambda_j)}\cos\Theta\right]\cdot e^{i\gamma_0(\lambda_j)(r_0\cos\Theta+d)+i\lambda_j r_0\sin\Theta}\tag{3-162}$$

在实际应用中，天线通常放置在地球表面。在这种情况下，$d/r_0\sim0$，$k_0d\sim0$，电磁场的三个分量可简化为

$$B_{0\Phi}^r(r_0,\Theta)=-\frac{\mu_0}{2\pi}e^{ik_0r_0}\left[\frac{ik_0\cos\Theta}{r_0}\cdot\frac{\sin\Theta-\varepsilon^*\cos\Theta}{\cos\Theta+\varepsilon^*\sin\Theta}-\frac{\varepsilon^*}{r_0^2\sin^2\Theta}\cdot\left(\frac{\sin\Theta}{\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta}\right)^3\right]$$

$$+\frac{\mu_0}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}e^{i\frac{\pi}{4}}\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)}e^{i\gamma_0(\lambda_j)r_0\cos\Theta+i\lambda_j r_0\sin\Theta}\tag{3-163}$$

$$E_{0\Theta}^r(r_0,\Theta)=-\frac{\omega\mu_0}{2\pi k_0}e^{ik_0r_0}\left[\frac{ik_0(\varepsilon^*\sin^3\Theta+\sin^2\Theta\cos\Theta-\varepsilon^*)}{r_0\sin\Theta(\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta)}\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^*}{r_0^2\sin^2\Theta}\cdot\left(\frac{\sin\Theta}{\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta}\right)^3\cdot(\varepsilon^*\cos\Theta+\sin\Theta)\right]$$

$$+\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\sin\Theta}}\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)}\cdot\left[\cos\Theta+\frac{\lambda_j}{\gamma_0(\lambda_j)}\sin\Theta\right]$$

$$\cdot e^{i\gamma_0(\lambda_j)r_0\cos\Theta+i\lambda_j r_0\sin\Theta}\tag{3-164}$$

$$E_{0r}^r(r_0,\Theta)=-\frac{\omega\mu_0}{2k_0\pi}e^{ik_0r_0}\cdot\frac{\varepsilon^*}{r_0^2\sin^2\Theta}\left(\frac{\sin\Theta}{\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta}\right)^3\cdot(\varepsilon^*\sin\Theta+\cos\Theta)$$

$$+\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{r_0\pi\sin\Theta}}\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)}\left[\sin\Theta-\frac{\lambda_j}{\gamma_0(\lambda_j)}\cos\Theta\right]e^{i\gamma_0(\lambda_j)r_0\cos\Theta+i\lambda_j r_0\sin\Theta}\tag{3-165}$$

当场点位于分界面上时，$\theta=\pi/2$，$r_0=\rho$，此时的电磁场分量可表示为

$$B_{0\Phi}^r\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\omega\mu_0}{2\pi k_0}\frac{e^{ik_0\rho}}{\varepsilon^{*2}\rho^2}+\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)}e^{i\lambda_j\rho}\tag{3-166}$$

$$E_{0\Theta}^r\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\omega\mu_0}{2\pi k_0}\frac{e^{ik_0\rho}}{\varepsilon^{*2}\rho^2}+\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{5}{2}}}{q'(\lambda_j)\gamma_0(\lambda_j)}e^{i\lambda_j\rho}\tag{3-167}$$

$$E_{0r}^r\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\omega\mu_0}{2\pi k_0}\frac{e^{ik_0\rho}}{\varepsilon^*\rho^2}+\frac{\omega\mu_0}{2k_0^2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sum_j\frac{A(\lambda_j)\lambda_j^{\frac{3}{2}}}{q'(\lambda_j)}e^{i\lambda_j\rho}\tag{3-168}$$

由此可见，当场点和源点都位于空气一侧的分界面上时，这些表达式由侧面波和吸附表面波组成，而直射波和理想反射波则不存在。

3.4.2 典型条件下的计算和讨论

在本章的研究中，我们最感兴趣的是源点和场点接近空气和覆盖于大地或海洋表面的介质层的交界面时的情况。显然，在这种情况下，与高度 d 和 z 相比较，辐射距离 ρ 相当大，因此条件 $d^2 \ll \rho^2$ 和 $z^2 \ll \rho^2$ 能够很好地被满足。这里将介绍垂直电偶极子产生的电场分量在四种典型情况下的计算结果。在这五种情况下，区域 2 的参数选取如下：(a)海水，$\varepsilon_{r2}=80$，$\sigma_2=4\text{S/m}$；(b)淡水，$\varepsilon_{r2}=80$，$\sigma_2=0.004\text{S/m}$；(c)湿地，$\varepsilon_{r2}=12$，$\sigma_2=0.4\text{S/m}$；(d)干地，$\varepsilon_{r2}=8$，$\sigma_2=0.04\text{S/m}$；(e)沙漠，$\varepsilon_{r2}=2$，$\sigma_2=0\text{s/m}$。若工作频率取为 $f=100\text{MHz}$，由于需要满足远区条件 $|P_0|\geqslant 4$，则辐射距离 ρ 的范围应为 170～1000 m。

如图 3-14 所示为区域 2 是理想导体和海水两种情况下电场分量 $E_{0\Theta}^{r}(r_0,\Theta)$ 的吸附表面波项随介质层厚度的变化关系曲线。计算所采用的参数如下：$f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.65$，$d+z=2$ m，$r_0=1000\text{m}$，$\Theta=89°$。从图 3-14 中可以看出，相比于理想导电基地情况，区域 2 为海水时，吸附表面波衰减得很快。如图 3-15 所示为利用本节的方法得到的“DRL 波”的计算结果，以及与利用 King 等人的专著[61]第 8 章的方法得

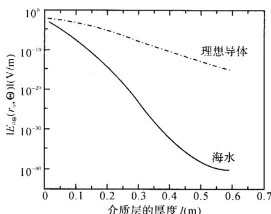


图 3-14 区域 2 是理想导体和海水两种情况下吸附表面波随介质层厚度的变化关系曲线

到的相应的计算结果相比较，两者符合很好。其中“DRL 波”包括直射波，理想反射波和侧面波。计算所采用的参数如下：$f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r2}=80$，$\sigma_2=4\text{S/m}$，$l=0.45\text{m}$，$r_0=200\text{m}$。图 3-16 和图 3-17 分别给出了电场分量 $E_{0r}^{r}(r_0,\Theta)$ 和 $E_{0\Theta}^{r}(r_0,\Theta)$ 随传播距离的变化关系曲线。图 3-18 和图 3-19 所示为电场分量 $E_{0r}^{r}(r_0,\Theta)$ 和 $E_{0\Theta}^{r}(r_0,\Theta)$ 的总场、“DRL 波”和吸附表面波随角度 Θ 变化的关系曲线。计算所采用的参数有：$f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.65$，$\varepsilon_{r2}=80$，$\sigma_2=4\text{S/m}$，$d=0\text{m}$，$k_1 l=0.45$，$r_0=500\text{m}$。

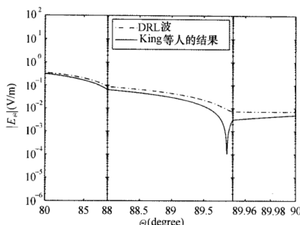


图 3-15　对于电场分量 $E^{r}_{0\Theta}(r_0,\Theta)$ 而言，"DRL"波随极角 Θ 的变化关系曲线

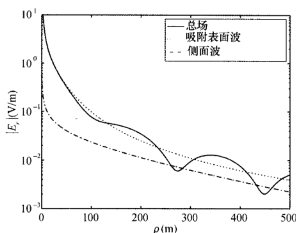


图 3-16　电场分量 $E^{r}_{0\Theta}(r_0,\Theta)$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线

在图 3-20 至图 3-22 中，分别给出了辐射距离为 $r_0=200$m，$r_0=500$m 和 $r_0=1000$m 的三种情况下电场分量 $E^{r}_{0\Theta}(r_0,\Theta)$ 远区场的辐射方向性图。计算所采用的参数如下：$f=100$MHz，$\varepsilon_{r1}=2.65$，$d=0$m 和 $k_1 l=0.45$。从图 3-20 可以看出，$r_0=200$ m 的情况下，所有曲线在 $\Theta=90°$时有很陡的尖峰。从图 3-21 和图 3-22 可以看出，在 $r_0=500$m 和 $r_0=1000$m 两种情况下，对海水、淡水和湿地而言，尖峰相对来讲要小了许多；对干地而言，尖峰则不存在。

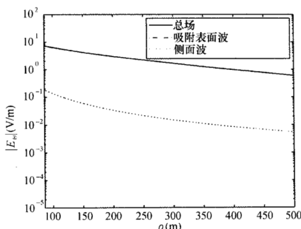


图 3-17 电场分量 $E^r_{0\Theta}(r_0,\Theta)$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线

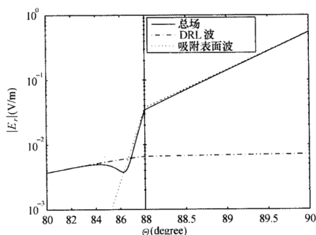


图 3-18 电场分量 $E^r_{0r}(r_0,\Theta)$ 随角度 Θ 的变化关系曲线

当 $\Theta \leqslant 88°$ 时，源点或场点离开空气和介质层的交界面有一定的距离，吸附表面波项在 z 方向以指数形式衰减，在这种情况下吸附表面波是可以被忽略的。将图 3-21 和图 3-22 分别与 King 等人的专著[61]中的图 8-13 和图 8-15 相比较，可以看出：当满足条件 $\Theta \leqslant 88°$ 和 $k_1 l \leqslant 0.6$ 时，本章的计算结果与 King 等人的专著[61]的结果是一致的。当 $\Theta > 88°$ 时，源点和场点都很接近边界，这种情况下就需要考虑吸附表面波项。当 $\Theta = 90°$ 时，源点和场点都在边界上，这时总场主要是由吸附表面波决定的。

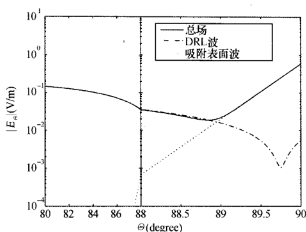


图 3-19　电场分量 $E_{0\Theta}^r(r_0,\Theta)$ 随角度 Θ 的变化关系曲线

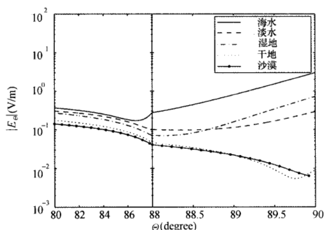


图 3-20　电场分量 $E_{0\Theta}^r(r_0,\Theta)$ 在五种典型情况下随角度 Θ 的变化关系曲线

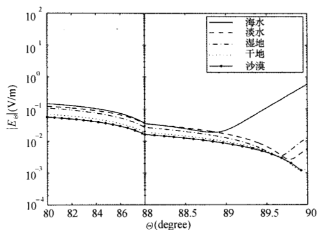


图 3-21　电场分量 $E^{r}_{0\Theta}(r_0,\Theta)$在五种典型情况下随角度 Θ 的变化关系曲线

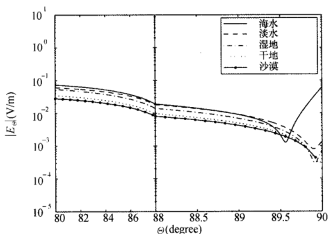


图 3-22　电场分量 $E^{r}_{0\Theta}(r_0,\Theta)$在五种典型情况下随角度 Θ 的变化关系曲线

第 4 章

水平电偶极子在三层介质中激励的电磁场

本章主要包括两部分内容：第一部分内容研究水平电偶极子在三层介质中激励的电磁场，得到电磁场分量的解析表达式。电磁场分量也可以分解为直射波、理想反射波、吸附表面波和侧面波四部分，其中吸附表面波和侧面波又可以分为电型波和磁型波[93][94]。第二部分内容研究水平电偶极子在三层介质中的辐射问题，并得到微带天线的辐射场的解析表达式[95]。

4.1 电磁波场分量的积分表达式

求解水平电偶极子在三层介质中的激励问题，可依照第 3 章中所述的类似步骤和方法进行。若采用与之相类似的坐标系，只需将垂直电偶极子换成水平电偶极子，如图 4-1 所示，三个区域的电磁场均应满足麦克斯韦方程组：

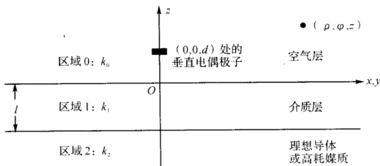


图 4-1 水平电偶极子在三层介质中激励的电磁场

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_j = \mathrm{i}\omega \boldsymbol{B}_j \tag{4-1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}_j=-\mathrm{i}\frac{k_j^2}{\omega}\boldsymbol{E}_j+\mu_0\boldsymbol{J}\tag{4-2}$$

其中，$j=0,1,2$ 表示三个区域；水平电偶极子源 $\boldsymbol{J}$ 可表示为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_x I\mathrm{d}l\delta(x)\delta(y)\delta(z-d)\tag{4-3}$$

在两个介质分界面满足的边界条件是

$$\begin{cases}E_{1x}(x,y,0)=E_{0x}(x,y,0)\\E_{1y}(x,y,0)=E_{0y}(x,y,0)\\k_1E_{1z}(x,y,0)=k_0E_{0z}(x,y,0)\end{cases}\tag{4-4}$$

$$\begin{cases}E_{1x}(x,y,-l)=E_{2x}(x,y,-l)\\E_{1y}(x,y,-l)=E_{2y}(x,y,-l)\\k_1E_{1z}(x,y,-l)=k_2E_{2z}(x,y,-l)\end{cases}\tag{4-5}$$

$$\boldsymbol{B}_1(x,y,0)=\boldsymbol{B}_0(x,y,0)\tag{4-6}$$

$$\boldsymbol{B}_1(x,y,-l)=\boldsymbol{B}_2(x,y,-l)\tag{4-7}$$

定义场分量的二维傅里叶变换及逆变换为

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\xi,\eta,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi x+\eta y)}\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{4-8}$$

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x+\eta y)}\widetilde{\boldsymbol{E}}(\xi,\eta,z)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\tag{4-9}$$

为了节省篇幅，本章不再逐步推导各场分量积分表达式的求解过程，只简单叙述一下求解的主要步骤。首先由麦克斯韦方程和边界条件，导出 $\widetilde{E}_{jx}$ 和 $\widetilde{B}_{jx}$ 的场分量的频域表达式，再导出其他各场分量的频域表达式；然后利用二维傅里叶变换的逆变换公式，先求得直角坐标系下的各个电磁场分量，再进行直角坐标系到柱坐标系的坐标变换，即可导出各场分量在柱坐标系下的积分表达式。若需要了解更详细的求解过程可参考本书3.1节。现在直接给出空气层中各场分量的积分表达式如下[30][93]：

$$E_{0\rho}(\rho,\varphi,z)=-\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi k_0^2}\cos\varphi[F_{\rho0}(\rho,z-d)-F_{\rho0}(\rho,z+d)+F_{\rho1}(\rho,z+d)]\tag{4-10}$$

$$E_{0\varphi}(\rho,\varphi,z)=\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi k_0^2}\sin\varphi[F_{\varphi0}(\rho,z-d)-F_{\varphi0}(\rho,z+d)+F_{\varphi1}(\rho,z+d)]\tag{4-11}$$

$$E_{0z}(\rho,\varphi,z)=\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi k_0^2}\cos\varphi[F_{z0}(\rho,z-d)-F_{z0}(\rho,z+d)+F_{z1}(\rho,z+d)]\tag{4-12}$$

$$B_{0\rho}(\rho,\varphi,z)=-\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi}\sin\varphi[G_{\rho0}(\rho,z-d)-G_{\rho0}(\rho,z+d)+G_{\rho1}(\rho,z+d)]\tag{4-13}$$

$$B_{0\varphi}(\rho,\varphi,z)=-\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi}\cos\varphi[G_{\varphi1}(\rho,z-d)-G_{\varphi1}(\rho,z+d)+G_{\varphi1}(\rho,z+d)]\tag{4-14}$$

$$B_{0z}(\rho,\varphi,z)=\frac{\mathrm{i}\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi}\sin\varphi[G_{z0}(\rho,z-d)-G_{z0}(\rho,z+d)+G_{z1}(\rho,z+d)] \tag{4-15}$$

其中式(4-10)至式(4-15)中的第一项代表从源点(0, 0, d)到场点的直射波；第二项为理想反射波或者由理想镜像源(0, 0, $-d$)到场点的波。下面我们列出前两项的积分表达式：

$$F_{\rho0}(\rho,z-d)=\int_0^{\infty}\left\{\frac{\gamma_0}{2}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]+\frac{k_0^2}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-16}$$

$$F_{\rho0}(\rho,z+d)=\int_0^{\infty}\left\{\frac{\gamma_0}{2}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]+\frac{k_0^2}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-17}$$

$$F_{\varphi0}(\rho,z-d)=\int_0^{\infty}\left\{\frac{\gamma_0}{2}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]+\frac{k_0^2}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-18}$$

$$F_{\varphi0}(\rho,z+d)=\int_0^{\infty}\left\{\frac{\gamma_0}{2}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]+\frac{k_0^2}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-19}$$

$$F_{z0}(\rho,z-d)=\pm\int_0^{\infty}J_1(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\cdot\lambda^2\mathrm{d}\lambda \qquad \begin{matrix} z>d \\ 0\leqslant z\leqslant d \end{matrix} \tag{4-20}$$

$$F_{z0}(\rho,z+d)=\int_0^{\infty}J_1(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{4-21}$$

$$G_{\rho0}(\rho,z-d)=G_{\varphi0}(\rho,z-d)=\pm\int_0^{\infty}J_0(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \qquad \begin{matrix} z>d \\ 0\leqslant z\leqslant d \end{matrix} \tag{4-22}$$

$$G_{\rho0}(\rho,z+d)=G_{\varphi0}(\rho,z+d)=\int_0^{\infty}J_0(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-23}$$

$$G_{z0}(\rho,z-d)=\int_0^{\infty}\gamma_0^{-1}J_1(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\cdot\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{4-24}$$

$$G_{z0}(\rho,z+d)=\int_0^{\infty}\gamma_0^{-1}J_1(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{4-25}$$

场分量式(4-10)至式(4-15)中最后一项可分解为电型波和磁型波，即

$$F_{\rho1}(\rho,z+d)=F_{\rho2}(\rho,z+d)+F_{\rho3}(\rho,z+d) \tag{4-26}$$

$$F_{\varphi1}(\rho,z+d)=F_{\varphi2}(\rho,z+d)+F_{\varphi3}(\rho,z+d) \tag{4-27}$$

$$G_{\rho1}(\rho,z+d)=G_{\rho2}(\rho,z+d)+G_{\rho3}(\rho,z+d) \tag{4-28}$$

$$G_{\varphi1}(\rho,z+d)=G_{\varphi2}(\rho,z+d)+G_{\varphi3}(\rho,z+d) \tag{4-29}$$

$$F_{z1}(\rho,z+d)=F_{z2}(\rho,z+d) \tag{4-30}$$

$$G_{z1}(\rho,z+d)=G_{z3}(\rho,z+d) \tag{4-31}$$

其中，下标中含有 2 的表示电型波，含有 3 的表示磁型波，它们分别为

$$F_{\rho 2}(\rho,z+d)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \gamma_0(Q_2+1)[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-32}$$

$$F_{\varphi 2}(\rho,z+d)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \gamma_0(Q_2+1)[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-33}$$

$$G_{\rho 2}(\rho,z+d)=\frac{1}{2}\int_0^\infty (Q_2+1)[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z-d)}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-34}$$

$$G_{\varphi 2}(\rho,z+d)=\frac{1}{2}\int_0^\infty (Q_2+1)[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-35}$$

$$F_{z2}(\rho,z+d)=\int_0^\infty (Q_2+1)J_1(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{4-36}$$

$$F_{\rho 3}(\rho,z+d)=-\frac{k_0^2}{2}\int_0^\infty \gamma_0^{-1}(P_3-1)[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-37}$$

$$F_{\varphi 3}(\rho,z+d)=-\frac{k_0^2}{2}\int_0^\infty \gamma_0^{-1}(P_3-1)[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-38}$$

$$G_{\rho 3}(\rho,z+d)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty (P_3-1)[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-39}$$

$$G_{\varphi 3}(\rho,z+d)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty (P_3-1)[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-40}$$

$$G_{z3}(\rho,z+d)=-\int_0^\infty (P_3-1)\gamma_0^{-1}J_1(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\cdot\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{4-41}$$

因为式(4-10)至式(4-15)中包含因子(Q_2+1)的分量有 F_{z2}、$F_{\rho 2}$、$F_{\varphi 2}$、$G_{\rho 2}$和 $G_{\varphi 2}$，但没有磁场的纵向分量 G_{z2}，所以它们可称为电型波分量；类似的，包含因子(P_3-1)的分量有 G_{z3}、$F_{\rho 3}$、$F_{\varphi 3}$、$G_{\rho 3}$和 $G_{\varphi 3}$，但没有电场的纵向分量 F_{z3}，所以它们可称为磁型波分量。系数 Q_2 与 P_3 分别是电型波与磁型波在介质层上方的反射系数，分别可表示为[56]

$$\frac{\gamma_0}{2}(Q_2+1)=\frac{k_0^2\gamma_0}{k_1^2}\left(\frac{k_1^2\gamma_2}{k_2^2}-\mathrm{i}\gamma_1\tan\gamma_1 l\right)\cdot\left[\gamma_0-\frac{\mathrm{i}k_0^2\gamma_1}{k_1^2}\tan\gamma_1 l+\frac{k_0^2\gamma_2}{k_2^2}-\frac{\mathrm{i}k_1^2\gamma_0\gamma_2}{k_2^2\gamma_1}\tan\gamma_1 l\right]^{-1} \tag{4-42}$$

$$\frac{k_0^2}{2\gamma_0}(P_3-1)=-k_0^2\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}-\mathrm{i}\tan\gamma_1 l\right)\cdot\left[\gamma_1-\mathrm{i}\gamma_0\tan\gamma_1 l+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(\gamma_0-\mathrm{i}\gamma_1\tan\gamma_1 l)\right]^{-1} \tag{4-43}$$

其中

$$\gamma_m=\sqrt{k_m^2-\lambda^2},\quad m=0,1,2 \tag{4-44}$$

当导电基底是理想导体时，则 $k_2\to\infty$，式(4-42)和式(4-43)可简化为

$$\frac{\gamma_0}{2}(Q_2+1)=-\frac{\mathrm{i}k_0^2\gamma_0\gamma_1\tan\gamma_1 l}{k_1^2\gamma_0-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l} \tag{4-45}$$

$$\frac{k_0^2}{2\gamma_0}(P_3-1)=\frac{\mathrm{i}k_0^2\tan\gamma_1 l}{\gamma_1-\mathrm{i}\gamma_0\tan\gamma_1 l} \tag{4-46}$$

场分量式(4-10)至式(4-15)中前两项直接求出。这些积分的解析表达式可表示为[30]

$$F_{\rho 0}(\rho,z-d)=-\left[\frac{2k_0}{r_1^2}+\frac{2\mathrm{i}}{r_1^3}+\left(\frac{z-d}{r_1}\right)^2\cdot\left(\frac{\mathrm{i}k_0^2}{r_1}-\frac{3k_0}{r_1^2}-\frac{3\mathrm{i}}{r_1^3}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1} \tag{4-47}$$

$$F_{\rho 0}(\rho,z+d)=-\left[\frac{2k_0}{r_2^2}+\frac{2\mathrm{i}}{r_2^3}+\left(\frac{z+d}{r_2}\right)^2\cdot\left(\frac{\mathrm{i}k_0^2}{r_2}-\frac{3k_0}{r_2^2}-\frac{3\mathrm{i}}{r_2^3}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2} \tag{4-48}$$

$$F_{\varphi 0}(\rho,z-d)=-\left(\frac{\mathrm{i}k_0^2}{r_1}-\frac{k_0}{r_1^2}-\frac{\mathrm{i}}{r_1^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1} \tag{4-49}$$

$$F_{\varphi 0}(\rho,z+d)=-\left(\frac{\mathrm{i}k_0^2}{r_2}-\frac{k_0}{r_2^3}-\frac{\mathrm{i}}{r_2^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2} \tag{4-50}$$

$$F_{z0}(\rho,z-d)=-\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{k_0^2}{r_1}+\frac{3\mathrm{i}k_0}{r_1^2}-\frac{3}{r_1^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1} \tag{4-51}$$

$$F_{z0}(\rho,z+d)=-\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{k_0^2}{r_2}+\frac{3\mathrm{i}k_0}{r_2^2}-\frac{3}{r_2^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2} \tag{4-52}$$

$$G_{\rho 0}(\rho,z-d)=G_{\varphi_0}(\rho,z-d)=-\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1} \tag{4-53}$$

$$G_{\rho 0}(\rho,z+d)=G_{\varphi 0}(\rho,z+d)=-\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2} \tag{4-54}$$

$$G_{z0}(\rho,z-d)=-\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{k_0}{r_1}+\frac{\mathrm{i}}{r_1^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1} \tag{4-55}$$

$$G_{z0}(\rho,z+d)=-\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{k_0}{r_2}+\frac{\mathrm{i}}{r_2^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2} \tag{4-56}$$

其中

$$r_1=\sqrt{\rho^2+(z-d)^2} \tag{4-57}$$

$$r_2=\sqrt{\rho^2+(z+d)^2} \tag{4-58}$$

至此，空气中电磁场的完整解只剩下对式(4-10)至式(4-15)中的最后一项的求解，即对式(4-32)至式(4-41)中的各个积分项进行求解。

这里需要说明的是，本书所提到的电型波和磁型波，也就是我们通常所说的 TM 波和 TE 波。因为本书很多内容都是在 King 等人工作的基础上得到的，所以我们沿用 King 等人的专著[30]中的说法。

4.2　电磁波场分量的解析表达式

4.2.1　电型波分量

首先分析含有因子 Q_2 的各积分项，即电型波分量的积分项式(4-32)至式

(4-36)。下面我们先分析式(4-32)和式(4-33)。考虑贝塞尔函数和汉克尔函数的关系：

$$J_n(\lambda\rho)=\frac{1}{2}[H_n^{(1)}(\lambda\rho)+H_n^{(2)}(\lambda\rho)] \tag{4-59}$$

$$H_n^{(1)}(-\lambda\rho)=H_n^{(2)}(\lambda\rho)(-1)^{n+1} \tag{4-60}$$

由于 γ_0 和 γ_1 是 λ 的偶函数，因而式(4-32)和式(4-33)可改写为

$$F_{\rho2}(\rho,z+d)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_0(Q_2+1)[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)]e^{i\gamma_0(z-d)}\lambda d\lambda \tag{4-61}$$

$$F_{\varphi2}(\rho,z+d)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_0(Q_2+1)[H_0^{(1)}(\lambda\rho)+H_2^{(1)}(\lambda\rho)]e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda d\lambda \tag{4-62}$$

假设导电基底是理想导体，现将式(4-45)分别代入式(4-61)和式(4-62)中，可得

$$F_{\rho2}(\rho,z+d)=-\frac{ik_0^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_1\gamma_0\tan(\gamma_1 l)e^{i\gamma_0(z+d)}}{k_1^2\gamma_0-ik_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l}[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)]\lambda d\lambda \tag{4-63}$$

$$F_{\varphi2}(\rho,z+d)=-\frac{ik_0^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_1\gamma_0\tan(\gamma_1 l)e^{i\gamma_0(z+d)}}{k_1^2\gamma_0-ik_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l}[H_0^{(1)}(\lambda\rho)+H_2^{(1)}(\lambda\rho)]\lambda d\lambda \tag{4-64}$$

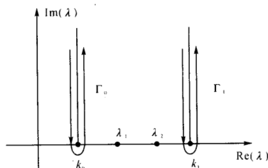


图 4-2　被积函数的极点和支点示意图

如图 4-2 所示为式(4-63)和式(4-64)中被积函数的极点和支点示意图。利用第 3 章中的方法，把对式(4-63)和式(4-64)的积分求解等效为求解极点方程的根的留数和沿支点割缝的积分。由式(4-63)和式(4-64)中的被积函数可以得到如下极点方程：

$$q(\lambda)=k_1^2\gamma_0-ik_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l=0 \tag{4-65}$$

极点方程式(4-65)与第 3 章中理想导电基底情况下的极点方程式(3-67)完全相同。在第 3 章已阐明，当介质层厚度满足 $n\pi\leqslant\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l\leqslant(n+1)\pi$ 时，方程式(4-65)应有 $n+1$ 个根，即被积函数有 $n+1$ 个极点，相应地有 $n+1$ 个沿介质表面传播的吸附表面波模。电型吸附表面波的传播波数随介质的电特性、介质层的厚度以及工作频率的变化规律与第 3 章的理想导电基底的极点规律相同，本章不再赘述。

下面我们介绍当介质层不太厚的情况下确定电型波极点的近似方法[95]。由式

(4-65)可以得到如下关系式：

$$\tan\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,l=\frac{k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}{k_0^2\sqrt{k_1^2-\lambda^2}} \tag{4-66}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}l}=\frac{k_0^2(k_1^2-\lambda^2)\sec^2(\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,l)}{\dfrac{k_1\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}+k_0^2\tan(\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,l)+k_0^2 l\lambda\sec^2(\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,l)} \tag{4-67}$$

将式(4-66)代入式(4-67)，并考虑 k_1 是实数，那么上述方程的左边不存在虚部。因为极点 λ_j 位于 k_0 和 k_1 之间，$\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,l$ 总是实数，这就意味着$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}l}>0$，所以在区间 $n\pi\leqslant\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l\leqslant(n+1)\pi$，极点 λ_j 是递增的。当满足条件 $\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,l<0.6$ 时，有一个极点，其位置可以用下面的近似式确定，即

$$\lambda_E=k_0+\frac{\left[-k_1^2\sqrt{2k_0}+\sqrt{2k_1^4k_0+8k_0^5(k_1^2-k_0^2)l^2}\right]^2}{16k_0^6l^2} \tag{4-68}$$

如图4-3所示为电型波中极点 λ_E 随介质层的厚度 l 的变化关系曲线。在确定了极点的位置之后，接下来需要沿割缝 Γ_0 和 Γ_1 进行估值。需要指出的是，式(4-63)和式(4-64)中的被积函数沿 Γ_1 的积分为0。根据复变函数理论，式(4-63)和式(4-64)可改写为

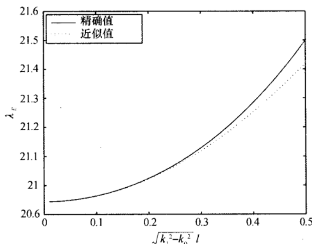


图4-3　电型波的极点 λ 随介质层厚度 l 的变化关系曲线

$$\begin{aligned}F_{\rho 2}(\rho,z+d)=&\ \pi k_0^2\sum_j\frac{\gamma_0^*\gamma_1^*\tan\gamma_1^* l}{q'(\lambda_j^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0^*(z+d)}\lambda_j^*\left[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)\right]\\&-\frac{\mathrm{i}k_0^2}{2}\int_{\Gamma_0}\frac{\gamma_1\gamma_0\tan\gamma_1 l}{k_1^2\gamma_0-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\left[H_0^{(1)}(\lambda\rho)\right.\\&\left.-H_2^{(1)}(\lambda\rho)\right]\lambda\,\mathrm{d}\lambda\end{aligned} \tag{4-69}$$

$$F_{\varphi 2}(\rho,z+d)=\pi k_0^2\sum_j\frac{\gamma_0^*\gamma_1^*\tan\gamma_1^* l}{q'(\lambda_j^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0^*(z+d)}\lambda_j^*\left[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho)+H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)\right]$$

$$
-\frac{\mathrm{i}k_0^2}{2}\int_{\Gamma_0}\frac{\gamma_1\gamma_0\tan\gamma_1 l}{k_1^2\gamma_0-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}[H_0^{(1)}(\lambda\rho)+H_2^{(1)}(\lambda\rho)]\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-70}
$$

其中

$$
q'(\lambda_j^*)=-\frac{k_1^2\lambda_j^*}{\gamma_0^*}+\mathrm{i}\frac{k_0^2\lambda_j^*}{\gamma_1^*}(\tan\gamma_1^* l+\gamma_1^* l\sec^2\gamma_1^* l) \tag{4-71}
$$

下一步需要沿割缝 Γ_0 进行估值。在我们感兴趣的远区，条件 $k_0\rho\gg1$ 成立，且 $k_0(z+d)$不大，因此积分的主要贡献将集中在靠近支点 k_0附近。取代换

$$
\lambda=k_0(1+\mathrm{i}\tau^2) \tag{4-72}
$$

在支点附近可取近似为

$$
\gamma_0\approx\sqrt{2}k_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\tau \tag{4-73}
$$

$$
\gamma_1\approx\sqrt{k_1^{\ 2}-k_0^{\ 2}} \tag{4-74}
$$

为了书写方便，令

$$
A=\frac{k_0}{k_1^2}\sqrt{k_1^2-k_0^2}\tan(\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l) \tag{4-75}
$$

此时式(4-69)中后一项沿 Γ_0 的积分可表示为

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{i}k_0^2}{2}\int_{\Gamma_0}\frac{\gamma_1\gamma_0\tan\gamma_1 l}{k_1^2\gamma_0-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)]\lambda\mathrm{d}\lambda\\
&=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}k_0^{\ 3}\cdot A\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-k_0\rho\left(\tau+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\dfrac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)^2\right]}{\tau-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot A\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\tau^2\mathrm{d}\tau\\
&=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}k_0^3A\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\cdot\left\{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2k_0\rho}}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}A\right)\right.\\
&\left.\quad+\frac{\pi}{2}A^2\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}A\right)^2\right]\cdot\mathrm{erfc}\left[\sqrt{-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}A\right)^2}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4-76}
$$

同样的，式(4-70)中后一项沿 Γ_0 的积分可表示为

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{i}k_0^2}{2}\int_{\Gamma_0}\frac{\gamma_1\gamma_0\tan\gamma_1 l}{k_1^2\gamma_0-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1\tan\gamma_1 l}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}[H_0^{(1)}(\lambda\rho)+H_2^{(1)}(\lambda\rho)]\lambda\mathrm{d}\lambda\\
&=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}k_0^{\ 3}\cdot A\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\cdot\left(\frac{-\mathrm{i}}{k_0\rho}\right)\\
&\quad\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-k_0\rho\left(\tau+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\dfrac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)^2\right]}{\tau-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot A\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\tau^2\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

$$= 2e^{-i\frac{\pi}{4}}k_0^3 A\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0 r_2}\cdot\left(\frac{-i}{k_0\rho}\right)\cdot\left\{-e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2k_0\rho}}\left(\frac{z+d}{\rho}+iA\right)\right.$$

$$+\frac{\pi}{2}A^2\exp\left[-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2\right]$$

$$\left.\cdot\operatorname{erfc}\left(\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2}\right)\right\} \tag{4-77}$$

故式(4-69)和式(4-70)最终可分别表示为

$$F_{\rho 2}(\rho,z+d) = \pi k_0^2\sum_j \frac{\gamma_0^*\gamma_1^*\tan\gamma_1^* l}{q'(\lambda_j^*)}e^{i\gamma_0^*(z+d)}\lambda_j^*\left[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho) - H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)\right]$$

$$+2e^{-i\frac{\pi}{4}}k_0^3 A\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0 r_2}\cdot\left\{-e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2k_0\rho}}\left(\frac{z+d}{\rho}+iA\right)\right.$$

$$+\frac{\pi}{2}A^2\exp\left[-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2\right]$$

$$\left.\cdot\operatorname{erfc}\left[\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2}\right]\right\} \tag{4-78}$$

$$F_{\varphi 2}(\rho,z+d) = \pi k_0^2\sum_j \frac{\gamma_0^*\gamma_1^*\tan\gamma_1^* l}{q'(\lambda_j^*)}e^{i\gamma_0^*(z+d)}\lambda_j^*\left[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho) + H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)\right]$$

$$+2e^{-i\frac{\pi}{4}}k_0^3 A\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0 r_2}\cdot\left(\frac{-i}{k_0\rho}\right)\cdot\left\{-e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2k_0\rho}}\left(\frac{z+d}{\rho}+iA\right)\right.$$

$$+\frac{\pi}{2}A^2\exp\left[-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2\right]$$

$$\left.\cdot\operatorname{erfc}\left[\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2}\right]\right\} \tag{4-79}$$

类似的，可以得到其他几个电型波场分量表达式。

$$G_{\rho 2}(\rho,z+d) = \pi k_0^2\sum_j \frac{\gamma_1^*\tan\gamma_1^* l}{q'(\lambda_j^*)}e^{i\gamma_0^*(z+d)}\lambda_j^*\left[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho) + H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)\right]$$

$$-2k_0^2 A\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0 r_2}\cdot\left(\frac{-i}{k_0\rho}\right)\cdot\left\{\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}A\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left[-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2\right]\cdot\operatorname{erfc}\left[\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2}\right]\right\} \tag{4-80}$$

$$G_{\varphi 2}(\rho,z+d) = \pi k_0^2\sum_j \frac{\gamma_1^*\tan\gamma_1^* l}{q'(\lambda_j^*)}e^{i\gamma_0^*(z+d)}\lambda_j^*\left[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho) - H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)\right]$$

$$-2k_0^2 A\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0 r_2}\cdot\left\{\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}A\right.$$

$$\cdot \exp\left[-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}A\right)^2\right]\cdot \mathrm{erfc}\left[\sqrt{-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}A\right)^2}\right]\Bigg\} \tag{4-81}$$

$$F_{z2}(\rho,z+d)=2\pi k_0^2\sum_j \frac{\gamma_1^*\tan\gamma_1^* l}{q'(\lambda_j^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0^*(z-d)}(\lambda_j^*)^2 H_1^{(1)}(\lambda_j^*\rho)$$

$$+2\mathrm{i}k_0^3 A\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\cdot\left\{\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot A\right.$$

$$\cdot\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}A\right)^2\right]$$

$$\left.\cdot\,\mathrm{erfc}\left[\sqrt{-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2}\right]\right\} \tag{4-82}$$

式(4-78)至式(4-82)表示理想导电基底情况下水平电偶极子在三层介质中激起的电磁场中的电型波分量。其中的第一项和式表示极点留数的贡献，为吸附表面波项，其传播波数位于 k_0 和 k_1 之间。第二项是被积函数沿支点割缝的积分，为侧面波项，其传播波数就是空气中的波数 k_0。

4.2.2 磁型波分量

下面用类似的方法分析磁型波积分项。考虑贝塞尔函数和汉克尔函数的关系式(4-59)和式(4-60)，磁型波分量的积分表达式(4-37)和式(4-38)也可改写为

$$F_{\rho3}(\rho,z+d)=-\frac{\mathrm{i}k_0^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tan(\gamma_1 l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}}{\gamma_1-\mathrm{i}\gamma_0\tan\gamma_1 l}\cdot\left[H_0^{(1)}(\lambda\rho)+H_2^{(1)}(\lambda\rho)\right]\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-83}$$

$$F_{\varphi3}(\rho,z+d)=-\frac{\mathrm{i}k_0^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tan(\gamma_1 l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}}{\gamma_1-\mathrm{i}\gamma_0\tan\gamma_1 l}\cdot\left[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)\right]\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{4-84}$$

式(4-83)和式(4-84)中被积函数的分母都含有相同的因子，因此磁型波的极点方程为

$$p(\lambda)=\gamma_1-\mathrm{i}\gamma_0\tan\gamma_1 l=0 \tag{4-85}$$

方程的根是一阶极点。需要指出的是，当 $\lambda=k_1$ 时，$p(\lambda)=0$，但被积函数的分子也为零，故 $\lambda=k_1$ 是可去极点。

现在分析极点方程式(4-85)，首先假定导电基底是理想导体，介质层也是无耗介质层，那么方程式(4-85)的解应该是一个纯实数。和分析电型波相类似，在 λ 复平面上，当 λ 在实轴上且 $k_0<\lambda\leqslant k_1$ 时，γ_0 是正虚数，γ_1 是正实数。此时 $p(\lambda)$ 变为

$$p(\lambda)=\sqrt{k_1^2-\lambda^2}+\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\tan(\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,l) \tag{4-86}$$

令

$$A(\lambda)=-\frac{\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}} \tag{4-87}$$

$$B(\lambda)=\tan\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,l \tag{4-88}$$

当 $\lambda\to k_0$ 时，$A(\lambda)\to-\infty$；当 $\lambda\to k_1$ 时，$A(\lambda)\to 0$。因此，在区间 $k_0<\lambda\leqslant k_1$，$A(\lambda)$ 恒为负。当 $\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<\pi/2$ 时，在区间 $k_0<\lambda\leqslant k_1$，$B(\lambda)$ 恒为正，$A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 不会相交，故方程式(4-85)无根，如图 4-4(a)所示。当 $\pi/2<\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l\leqslant\pi$ 时，$B(\lambda)$ 与 $A(\lambda)$ 有一个交点，故方程式(4-85)有一个根，如图 4-4(b)所示。

由以上分析可知，只有当介质层的厚度满足 $\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l>\pi/2$ 的条件时，水平电偶极子才能在介质层表面上激励出磁型表面波。当 $\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<\pi/2$ 时，仅有电型表面波存在，而没有磁型表面波。一般地说，若介质层的厚度满足条件 $(n-1/2)\pi<\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<(n+1/2)\pi$，磁型波的极点方程式(4-85)有 n 个根，水平电偶极子可以在介质表面上激励出 n 个磁型表面波模式，这 n 个磁型表面波模式的传播波数就是这 n 个极点的值。

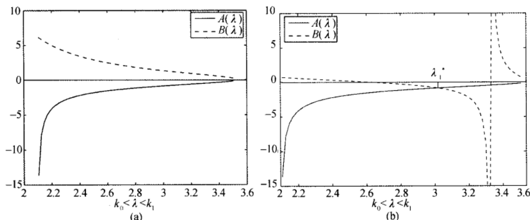


图 4-4　求解方程式(4-85)根的示意图

如图 4-5 所示为极点方程式(4-85)的第一个根随介质层厚度的变化规律。其中所用到的参数为 $f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.65+0.01\text{i}$，导电基底是理想导电基底。从图 4-5中可以看出，当介质层有损耗时，极点方程的根将不再是一个纯实数，而是一个含有较小虚部的复数。因此，当介质层有损耗时，吸附表面波除了扩散衰减外，还有一个吸收衰减。

下面我们介绍确定磁型波极点位置的近似方法[95]。极点方程式(4-85)可改写为

$$\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\tan\left(\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l-\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}=0 \tag{4-89}$$

可得

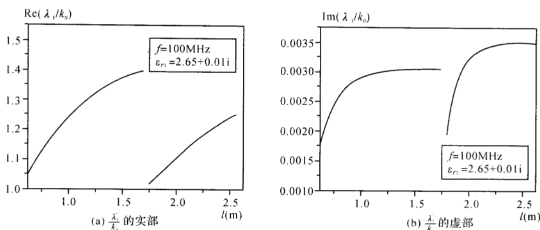


图 4-5　磁型波的极点$\frac{\lambda_1^*}{k_0}$随介质层厚度 l 的变化规律

$$\tan\gamma_1 l = -\frac{\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}} \tag{4-90}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}l} = \frac{\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\sec^2(\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,l)}{\dfrac{\lambda}{\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}+\dfrac{\lambda l\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\sec^2(\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,l)}{\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}-\dfrac{\lambda\tan(\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,l)}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}} \tag{4-91}$$

将式(4-90)代入式(4-91)，并考虑 k_1 是实数，可知在区间 $k_0<\lambda<k_1$，$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}l}>0$ 成立。当满足条件$\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l-\frac{\pi}{2}\ll 1$ 时，我们可以得到如下近似式：

$$\tan\left(\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l-\frac{\pi}{2}\right)\approx\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l-\frac{\pi}{2} \tag{4-92}$$

经过复杂的推导过程，我们可以得到在满足条件$\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l-\pi/2\ll 1$ 时确定磁型波极点 λ_B 的近似表达式，即

$$\lambda_B = k_0+\frac{(\sqrt{2k_0}-\sqrt{2k_0-4A_bB_b})^2}{4B_b^2} \tag{4-93}$$

式中

$$A_b=\sqrt{k_1^2-k_0^2}\left(\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l-\frac{\pi}{2}\right) \tag{4-94}$$

$$B_b=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k_0}{\sqrt{k_1^2-k_0^2}}-2k_0 l \tag{4-95}$$

如图 4-6 所示为磁型波的极点 λ_B 随介质层厚度 l 的变化关系曲线，其中实线代表利用式(4-93)计算所得的近似结果，虚线代表利用牛顿法得到的结果。可以看出磁型波的极点在$\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l-\pi/2\ll 1$ 条件下的近似结果和利用牛顿法得到的结果十分接近。

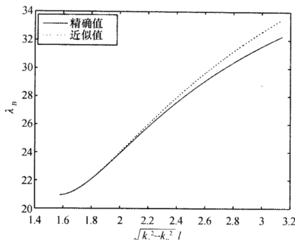


图 4-6　磁型波的极点 λ 随介质层厚度 l 的变化关系曲线

确定了极点的位置之后，接下来的主要任务是沿割缝 Γ_0 和 Γ_1 进行估值。需要指出的是式(4-83)和式(4-84)中的被积函数沿 Γ_1 的积分等于 0。根据复变函数理论，式(4-83)和式(4-84)可改写为

$$F_{\rho 3}(\rho,z+d)=\pi k_0^2\sum_j\frac{\tan\gamma_1^* l\cdot e^{i\gamma_0^*(z+d)}}{p'(\lambda_j^*)}\cdot\lambda_j^*\left[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho)+H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)\right]-\frac{ik_0^2}{2}\int_{\Gamma_0}\frac{\tan\gamma_1 l\cdot e^{i\gamma_0(z+d)}}{\gamma_1-i\gamma_0\tan\gamma_1 l}\cdot\left[H_0^{(1)}(\lambda\rho)+H_2^{(1)}(\lambda\rho)\right]\lambda d\lambda \tag{4-96}$$

$$F_{\varphi 3}(\rho,z+d)=\pi k_0^2\sum_j\frac{\tan\gamma_1^* l\cdot e^{i\gamma_0^*(z+d)}}{p'(\lambda_j^*)}\cdot\lambda_j^*\left[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)\right]-\frac{ik_0^2}{2}\int_{\Gamma_0}\frac{\tan\gamma_1 l\cdot e^{i\gamma_0(z+d)}}{\gamma_1-i\gamma_0\tan\gamma_1 l}\cdot\left[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)\right]\lambda d\lambda \tag{4-97}$$

其中

$$p'(\lambda_j^*)=-\frac{\lambda_j^*}{\gamma_1^*}+i\lambda_j^*\left(\frac{\tan\gamma_1^* l}{\gamma_0^*}+\frac{\gamma_0^* l}{\gamma_1^*}\sec^2\gamma_1^* l\right) \tag{4-98}$$

式(4-96)和式(4-97)中前一项和式是极点留数的贡献，代表吸附表面波项，后一项是沿支点割缝的积分项，代表侧面波项。

下一步需要沿割缝 Γ_0 估值。考虑在远区，$k_0\rho\gg 1$，积分的主要贡献集中在支点 k_0 附近，和电型波的情况相类似，可得

$$-\frac{ik_0^2}{2}\int_{\Gamma_0}\frac{\tan(\gamma_1 l)e^{i\gamma_0(z+d)}}{\gamma_1-i\gamma_0\tan\gamma_1 l}\cdot\left[H_0^{(1)}(\lambda\rho)+H_2^{(1)}(\lambda\rho)\right]\lambda d\lambda$$
$$=-2ik_0^3\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0 r_2}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot T\cdot\exp\left[-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+iT\right)^2\right]\right.$$

$$\cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2}\right)\Bigg\}\cdot\left(\frac{-\mathrm{i}}{k_0\rho}\right) \tag{4-99}$$

和

$$-\frac{\mathrm{i}k_0^2}{2}\int_{\Gamma_0}\frac{\tan(\gamma_1 l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}}{\gamma_1-\mathrm{i}\gamma_0\tan\gamma_1 l}\cdot[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)]\lambda\mathrm{d}\lambda$$

$$=-2\mathrm{i}k_0^3\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_2}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}-\frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\cdot T\cdot\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2\right]\right.$$

$$\left.\cdot\operatorname{erfc}\left[\sqrt{-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2}\right]\right\} \tag{4-100}$$

其中

$$T=\frac{\sqrt{k_1^2-k_0^2}}{k_0\tan\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l} \tag{4-101}$$

故有

$$F_{\rho3}(\rho,z+d)=\pi k_0^2\sum_j\frac{\tan\gamma_1^* l}{p'(\lambda_j^*)}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0^*(z+d)}\cdot\lambda_j^*\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho)+H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)]$$

$$-2\mathrm{i}k_0^3\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_2}\cdot\left(\frac{-\mathrm{i}}{k_0\rho}\right)$$

$$\cdot\left\{\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot T\cdot\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2\right]\right.$$

$$\left.\cdot\operatorname{erfc}\left[\sqrt{-\frac{\mathrm{i}k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2}\right]\right\} \tag{4-102}$$

$$F_{\varphi3}(\rho,z+d)=\pi k_0^2\sum_j\frac{\tan\gamma_1^* l}{p'(\lambda_j^*)}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0^*(z+d)}\cdot\lambda_j^*\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)]-2\mathrm{i}k_0^3\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}$$

$$\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_2}\cdot\left\{\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot T\cdot\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2\right]\right.$$

$$\left.\cdot\operatorname{erfc}\left[\sqrt{-\frac{\mathrm{i}k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2}\right]\right\} \tag{4-103}$$

利用同样的方法，又可得

$$G_{\rho3}(\rho,z+d)=\pi\sum_j\frac{\gamma_0^*.\tan\gamma_1^* l}{p'(\lambda_j^*)}\cdot\lambda_j^*\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0^*(z+d)}[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)]$$

$$+2k_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_2}\cdot\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\frac{z+d}{2}-\mathrm{i}T\right)\cdot\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi}{2}T^2\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2\right]\cdot\operatorname{erfc}\left[\sqrt{-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2}\right]\right\} \tag{4-104}$$

$$G_{\varphi3}(\rho,z+d)=\pi\sum_j\frac{\gamma_0^*\cdot\tan\gamma_1^*l}{p'(\lambda_j^*)}\cdot\lambda_j^*\cdot e^{i\gamma_0^*(z+d)}[H_0^{(1)}(\lambda_j^*\rho)+H_2^{(1)}(\lambda_j^*\rho)]+2k_0^2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0r_2}\cdot\left(\frac{-i}{k_0\rho}\right)\cdot\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{z+d}{2}-iT\right)\right.$$

$$\cdot\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi}{2}T^2\cdot\exp\left[-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+iT\right)^2\right]$$

$$\left.\cdot\operatorname{erfc}\left[\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+iT\right)^2}\right]\right\}\tag{4-105}$$

$$G_{z3}(\rho,z+d)=2\pi\sum_j\frac{\lambda_j^{*2}\tan\gamma_1^*l}{p'(\lambda_j^*)}\cdot e^{i\gamma_0^*(z+d)}\cdot H_1^{(1)}(\lambda_j^*\rho)$$

$$-2k_0^2\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0r_2}$$

$$\cdot\left\{\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot T\cdot\exp\left[-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+iT\right)^2\right]\right.$$

$$\left.\cdot\operatorname{erfc}\left[\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+iT\right)^2}\right]\right\}e^{ik_0r_2}\tag{4-106}$$

式(4-102)至式(4-106)表示理想导电基底情况下水平电偶极子在三层介质中激励的电磁场的磁型波分量，其中的第一项是极点留数的贡献，为吸附表面波项，第二项是被积函数沿支点割缝的积分项，为侧面波项。

4.2.3　场分量的完整表达式

在得到电型波和磁型波分量后，加上直射波和理想反射波，就可以获得各场分量的完整的解析表达式，具体如下：

$$E_{0\rho}(\rho,\varphi,z)=-\frac{\omega\mu_0 Idl}{4\pi k_0^2}\cos\varphi\cdot\left\{-\left[\frac{2k_0}{r_1^2}+\frac{2i}{r_1^3}+\left(\frac{z-d}{r_1}\right)^2\cdot\left(\frac{ik_0^2}{r_1}-\frac{3k_0}{r_1^2}-\frac{3i}{r_1^3}\right)\right]e^{ik_0r_1}\right.$$

$$+\left[\frac{2k_0}{r_2^2}+\frac{2i}{r_2^3}+\left(\frac{z+d}{r_2}\right)^2\cdot\left(\frac{ik_0^2}{r_2}-\frac{3k_0}{r_2^2}-\frac{3i}{r_2^3}\right)\right]e^{ik_0r_2}$$

$$+\pi k_0^2\sum_j\frac{\gamma_{0E}^*\gamma_{1E}^*\tan\gamma_{1E}^*l}{q'(\lambda_{jE}^*)}\cdot e^{i\gamma_{0E}^*(z+d)}\cdot\lambda_{jE}^*\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)]$$

$$+\pi k_0^2\sum_j\frac{\tan\gamma_{1B}^*l}{p'(\lambda_{jB}^*)}\cdot e^{i\gamma_{0B}^*(z+d)}\cdot\lambda_{jB}^*\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)+H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)]$$

$$+2e^{-i\frac{\pi}{4}}k_0^3A\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0r_2}\cdot\left[-e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2k_0\rho}}\left(\frac{z+d}{\rho}+iA\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2}A^2\exp\left(-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2\right)\cdot\operatorname{erfc}\left(\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2}\right)\right]$$

$$-2\mathrm{i}k_0^3\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\cdot\left(\frac{-\mathrm{i}}{k_0\rho}\right)\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot T\right.$$
$$\left.\left.\cdot\exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2\right)\cdot\operatorname{erfc}\left(\sqrt{-\frac{\mathrm{i}k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2}\right)\right]\right\}$$

(4-107)

$$E_{0\varphi}(\rho,\varphi,z)=-\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi k_0^2}\sin\varphi\cdot\left\{-\left(\frac{\mathrm{i}k_0^2}{r_1}-\frac{k_0}{r_1^2}-\frac{\mathrm{i}}{r_1^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}+\left(\frac{\mathrm{i}k_0^2}{r_2}-\frac{k_0}{r_2^3}-\frac{\mathrm{i}}{r_2^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\right.$$
$$+\pi k_0^2\sum_j\frac{\gamma_{0E}^*\gamma_{1E}^*\tan\gamma_{1E}^* l}{q'(\lambda_{jE}^*)}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^*(z+d)}\cdot\lambda_{jE}^*\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)+H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)]$$
$$+\pi k_0^2\sum_j\frac{\tan\gamma_{1B}^* l}{p'(\lambda_{jB}^*)}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(z+d)}\cdot\lambda_{jB}^*\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)]$$
$$+2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}k_0^3 A\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\cdot\left(\frac{-\mathrm{i}}{k_0\rho}\right)\cdot\left[-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2k_0\rho}}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}A\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{2}A^2\exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}A\right)^2\right)\cdot\operatorname{erfc}\left(\sqrt{-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}A\right)^2}\right)\right]$$
$$-2\mathrm{i}k_0^3\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot T\right.$$
$$\left.\left.\cdot\exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2\right)\cdot\operatorname{erfc}\left(\sqrt{-\frac{\mathrm{i}k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+\mathrm{i}T\right)^2}\right)\right]\right\}$$

(4-108)

$$E_{0z}(\rho,\varphi,z)=\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi k_0^2}\cos\varphi\cdot\left\{-\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{k_0^2}{r_1}+\frac{3\mathrm{i}k_0}{r_1^2}-\frac{3}{r_1^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\right.$$
$$+\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{k_0^2}{r_2}+\frac{3\mathrm{i}k_0}{r_2^2}-\frac{3}{r_2^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}$$
$$+2\pi k_0^2\sum_j\frac{\gamma_{1E}^*\tan\gamma_{1E}^* l}{q'(\lambda_{jE}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^*(z+d)}(\lambda_{jE}^*)^2 H_1^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)+2\mathrm{i}k_0^3 A.\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}$$
$$\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot A\cdot\exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}A\right)^2\right)\right.$$
$$\left.\left.\cdot\operatorname{erfc}\left(\sqrt{-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}A\right)^2}\right)\right]\right\}\qquad(4\text{-}109)$$

$$B_{0\rho}(\rho,\varphi,z)=-\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi}\sin\varphi\cdot\left\{-\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}+\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\right.$$
$$+\pi k_0^2\sum_j\frac{\gamma_{1E}^*\tan\gamma_{1E}^* l}{q'(\lambda_{jE}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^*(z+d)}\lambda_{jE}^*[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)+H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)]$$
$$+\pi\sum_j\frac{\gamma_{0B}^*.\tan\gamma_{1B}^* l}{p'(\lambda_{jB}^*)}\cdot\lambda_{jB}^*\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(z+d)}[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)]$$

$$
\begin{aligned}
&-2k_0^2A\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0r_2}\cdot\left(\frac{-i}{k_0\rho}\right)\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot A\right.\\
&\cdot\exp\left[-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2\right]\\
&\left.\cdot\operatorname{erfc}\left(\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2}\right)\right]+2k_0^2e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0r_2}\\
&\cdot\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{z+d}{2}-iT\right)\cdot\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\right.\\
&\left.\left.+\frac{\pi}{2}T^2\cdot\exp\left(-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+iT\right)^2\right)\cdot\operatorname{erfc}\left(\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+iT\right)^2}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{4-110}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{0\varphi}(\rho,\varphi,z)=&-\frac{\mu_0Idl}{4\pi}\cos\varphi\cdot\left\{-\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{ik_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}\right)e^{ik_0r_1}+\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{ik_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\right)e^{ik_0r_2}\right.\\
&+\pi k_0^2\sum_j\frac{\gamma_{1E}^*\tan\gamma_{1E}^*l}{q'(\lambda_{jE}^*)}e^{i\gamma_{0E}^*(z+d)}\lambda_{jE}^*\left[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)\right]\\
&+\pi\sum_j\frac{\gamma_{0B}^*.\tan\gamma_{1B}^*l}{p'(\lambda_{jB}^*)}\cdot\lambda_{jB}^*\cdot e^{i\gamma_{0B}^*(z+d)}\left[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)+H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)\right]\\
&-2k_0^2A\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0r_2}\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}A\right.\\
&\left.\cdot\exp\left(-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2\right)\cdot\operatorname{erfc}\left(\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-iA\right)^2}\right)\right]\\
&+2k_0^2e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0r_2}\cdot\left(\frac{-i}{k_0\rho}\right)\cdot\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\frac{z+d}{2}-iT\right)\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi}{2}T^2\right.\\
&\left.\left.\cdot\exp\left(-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+iT\right)^2\right)\cdot\operatorname{erfc}\left(\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+iT\right)^2}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{4-111}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{0z}(\rho,\varphi,z)=&\frac{i\mu_0Idl}{4\pi}\sin\varphi\cdot\left\{-\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{k_0}{r_1}+\frac{i}{r_1^2}\right)e^{ik_0r_1}+\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{k_0}{r_2}+\frac{i}{r_2^2}\right)e^{ik_0r_2}\right.\\
&+2\pi\sum_j\frac{\lambda_{jB}{}^{*2}\tan\gamma_{1B}{}^*l}{p'(\lambda_{jB}{}^*)}\cdot e^{i\gamma_{0B}{}^*(z+d)}\cdot H_1{}^{(1)}(\lambda_{jB}{}^*\rho)\\
&-2k_0^2\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot e^{ik_0r_2}\\
&\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot T\cdot\exp\left(-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+iT\right)^2\right)\right.\\
&\left.\left.\cdot\operatorname{erfc}\left(\sqrt{-i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}+iT\right)^2}\right)\right]\right\}e^{ik_0r_2}
\end{aligned}
\tag{4-112}
$$

其中 r_1、r_2 分别由式(4-57)和式(4-58)给出，$q'(\lambda_{jE}^*)$ 和 $p'(\lambda_{jB}^*)$ 现可重写为

$$q'(\lambda_{jE}^*) = -\frac{k_1^2\lambda_{jE}^*}{\gamma_{0E}^*} + \mathrm{i}\,\frac{k_0^2\lambda_{jE}^*}{\gamma_{1E}^*}(\tan\gamma_{1E}^* l + \gamma_{1E}^* l \sec^2\gamma_{1E}^* l) \tag{4-113}$$

$$p'(\lambda_{jB}^*) = -\frac{\lambda_{jE}^*}{\gamma_{1E}^*} + \mathrm{i}\lambda_{jE}^*\left(\frac{\tan\gamma_{1E}^* l}{\gamma_{0E}^*} + \frac{\gamma_{0E}^* l}{\gamma_{1E}^*}\sec^2\gamma_{1E}^* l\right) \tag{4-114}$$

这里，λ_{jE}^* 和 λ_{jB}^* 分别为电型波和磁型波积分表达式中的被积函数第 j 个极点。γ_{mE}^* 和 γ_{mB}^* 也可重写为

$$\gamma_{mE}^* = \sqrt{k_m^2 - (\lambda_{jE}^*)^2}, \quad m=0,1 \tag{4-115}$$

$$\gamma_{mB}^* = \sqrt{k_m^2 - (\lambda_{jB}^*)^2}, \quad m=0,1 \tag{4-116}$$

式中：m 代表区域 0 和区域 1，j 代表极点个数($0\sim n$)。

4.2.4 和已有结果的比较

水平电偶极子在三层介质中激励的电磁场与垂直电偶极子的情况有着明显的差别。除了极化与方向性差别外，它们在表面上激起的吸附表面波的传播波数也不一样。对于水平电偶极子激起的电磁场，除了直射波和理想反射波以外，还需要分解出电型波分量与磁型波分量。

电型与磁型吸附表面波的传播波数也不一样。其中电型表面波的传播波数由极点方程式(4-65)的根确定，此方程与第 3 章中理想导电基底情况的极点方程式(3-67)完全一样，即理想导电基底情况下垂直电偶极子激励的吸附表面波就是电型吸附表面波。而磁型表面波的传播波数由极点方程式(4-85)的根确定。当介质层很薄，满足条件 $0<\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<\pi/2$，极点方程式(4-85)无解。在此种情况下，水平电偶极子不能激励出磁型表面波。当介质层厚度满足条件 $(n-1/2)\pi<\sqrt{k_1^2-k_0^2}\,l<(n+1/2)\pi$ 时，极点方程(4-85)有 n 个根，被积函数有 n 个极点，故将在表面上激起 n 个磁型表面波的传播模式。

除了沿表面传播的吸附表面波以外，还有沿割缝积分引起的侧面波存在。由于本章中没有对介质层的厚度进行限制，为了与 King 等人的结果[56][57]相比较，我们考虑介质层满足的条件，即 $k_0^2 \ll k_1^2$，$k_1^2 l^2 \ll 1$。King 等人[56][57]给出的 E_{0z} 分量的最后结果为

$$\begin{aligned}E_{0z}(\rho,\varphi,z) = -\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi k_0}\cos\varphi\Bigg\{&\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{3}{r_1^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0 r_1^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\\ &-\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0 r_2^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\\ &+2\Phi\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\cdot\left[\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^3}\right)-k_0^2\Phi\left(\frac{\pi}{k_0 r_2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2}\cdot F(p_2)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{4-117}$$

其中

$$p_2=\frac{k_0 r_2}{2}\left(\frac{\Phi r_2+z+d}{\rho}\right)^2 \tag{4-118}$$

$$F(p_2)=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})-\int_0^{p_2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}t \tag{4-119}$$

$$\Phi=-\mathrm{i}k_0 l \tag{4-120}$$

式(4-117)中大括号内的第一项和第二项是直射波和理想反射波，分别对应于式(4-109)中的第一项和第二项，第三项对应于式(4-109)中的第四项侧面波。本章中得出的直射波和反射波除了一个因子 $\mathrm{i}k_0^{-1}$ 外其余与式(4-126)中的对应项完全一样，而式(4-109)中的第三项表示的吸附表面波，King 等人在他们的工作[56][57]中没有考虑到。下面分析式(4-109)中的侧面波项，若记为 F_{z2}^{l}，则当 $k_1 l\ll 1$ 及 $k_1^2\gg k_0^2$ 时，可取近似

$$F_{z2}^{l}\approx 2\mathrm{i}k_0^4 l\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\cdot\left\{\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}k_1 l\cdot\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}k_0 l\right)^2\right]\right.$$
$$\left.\cdot\,\mathrm{erfc}\left[\sqrt{-\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}k_0 l\right)^2}\right]\right\} \tag{4-121}$$

考虑到 $r_2\approx\rho$，故

$$p_2\approx\frac{-\mathrm{i}k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}-\mathrm{i}k_0 l\right)^2 \tag{4-122}$$

由文献[56]可知

$$\mathrm{erfc}(\sqrt{-\mathrm{i}p_2})=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}F(p_2) \tag{4-123}$$

式(4-121)可改写为

$$F_{z2}^{l}=2\mathrm{i}k_0^4 l\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left\{\frac{1}{k_0\rho}+k_0 l\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2}\cdot F(p_2)\right\} \tag{4-124}$$

E_{0z} 的侧面波项可表示为

$$E_{0z}^{l}=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi}\cos\varphi\cdot k_0^2 l\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left(\frac{1}{k_0\rho}+k_0 l\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2}\cdot F(p_2)\right) \tag{4-125}$$

将式(4-125)与式(4-117)中最后一项作比较，可以看出，因为 $k_0 r_2\approx k_0\rho\gg 1$，两者是完全一致的。

以磁型波分量 B_{0z} 为例，King 等人[56][57]给出的结果是

$$B_{0z}(\rho,\varphi,z)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\sin\varphi\left\{\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}-\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\right.$$
$$+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\Phi\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0 r_2^3}\right)\right.$$
$$\left.\left.-\Phi^2\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\left(\frac{1}{r_2^2}+\frac{3\mathrm{i}}{k_0 r_2^3}-\frac{3}{k_0^2 r_2^4}\right)+\left(\frac{z+d}{r_2}\right)^2\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{6}{r_2^2}-\frac{15\mathrm{i}}{k_0 r_2^3}\right)\right)\right]\right\}$$
$$\tag{4-126}$$

其中，大括号内第一项和第二项是直射波和反射波，分别对应于本章中的 $G_{z0}(\rho,z-d)$ 和 $G_{z0}(\rho,z+d)$；第三项对应侧面波。当 $\rho\gg z+d$ 时，侧面波项可近似地表示为

$$B_{0z}^{l}\approx\frac{\Phi^{2}\mu_{0}}{2\pi}\sin\varphi\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{0}r_{2}}}{\rho^{2}} \tag{4-127}$$

在本章给出的表达式(4-112)中，前一项代表沿表面传播的吸附表面波，在文献[56]中也没有被考虑；后一项是侧面波，在满足文献[56]给定的薄层条件下，侧面波可近似为

$$G_{z3}^{l}\approx-2k_{0}^{2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_{0}\rho}}\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_{0}\rho}}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\pi}{\sqrt{2}k_{0}l}\cdot\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\rho}{2k_{0}l^{2}}\right)\cdot\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{i}\rho}{2k_{0}l^{2}}}\right)\right] \tag{4-128}$$

因为 $k_{0}l\ll1$ 及 $\rho\gg l$，取误差函数的渐近展开式[120]

$$\mathrm{erfc}(\sqrt{x})\approx\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\mathrm{e}^{-x}\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{3}{4x^{2}}+\cdots\right) \tag{4-129}$$

以式(4-129)代入式(4-128)，第一项抵消后可得

$$G_{z3}^{l}\approx\frac{2\mathrm{i}k_{0}^{2}l^{2}}{\rho^{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{0}r_{2}} \tag{4-130}$$

故有

$$B_{0z}^{l}=-\frac{\mu_{0}k_{0}^{2}l^{2}}{2\pi\rho^{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{0}r_{2}}\sin\varphi \tag{4-131}$$

与式(4-127)完全一致。

由以上分析可知，在薄层条件下，King 等人的论文[56][57]中侧面波项与本章所得结果中沿割缝的积分完全一致，但他们没有考虑沿表面传播的吸附表面波项。而在三层介质情况下，此种吸附表面波是客观存在的，故理想导电基底情况下水平电偶极子在三层介质中激励的电磁场的完整表达式应由式(4-107)至式(4-112)来表达。本章所得的结果并没有对介质层的厚度加以限制，但考虑到沿表面传播的情况，即应限制于 $\rho\gg z+d$ 及 $k_{0}\rho\gg1$。还需说明的是，本章所得到的吸附表面波和 Wait[68]中所提到的那种吸附表面波是不同的。

4.2.5 典型条件下的计算和讨论

如图 4-7 到图 4-10 所示为场分量 $E_{0\rho}$ 的总场、吸附表面波和侧面波在 $\varphi=0$ 方向上和 $E_{0\varphi}$ 的总场、吸附表面波和侧面波在 $\varphi=\pi/2$ 方向上随传播距离变化的规律，主要参数为 $f=100\mathrm{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.85+0.01\mathrm{i}$，$k_{1}l=0.8\pi$。图 4-7 和图 4-8 对应 $z=d=0\mathrm{m}$ 时的情况，图 4-9 和图 4-10 对应 $z=d=3\mathrm{m}$ 时的情况。因为电型表面波和磁型表面波的传播波数不相同，所以我们在图中分别绘出了电型表面波和磁型表面波分量。而由于电型侧面波和磁型侧面波的传播波数都是 k_{0}，图中只绘出了侧面波总分量，包括电型侧面波和磁型侧面波。从图 4-7 至图 4-10 的结果，可以得出如下结论：

(1)不论电型侧面波还是磁型侧面波，其传播波数都是空气的波数 k_{0}。而表面波

的传播波数介于 k_0 和 k_1 之间，与传播频率、介质层的厚度以及其介电系数和电导率等参数有关，并且电型表面波和磁型表面波的传播波数也不相同。由图 4-7 和 4-8 可知，$E_{0\rho}$的干涉波长比 $E_{0\varphi}$的小。这说明在图中给出的介质层厚度情况下，电型表面波的传播波数比磁型表面波大。

(2)在离开介质层表面后，吸附表面波沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向以指数规律衰减。

(3)从上面的理论推导和分析讨论中可以看出，场分量 $E_{0\rho}$以电型波为主，而场分量 $E_{0\varphi}$以磁型波为主；而 $B_{0\rho}$ 和 $B_{0\varphi}$ 则相反，$B_{0\varphi}$ 以电型波为主，$B_{0\rho}$ 以磁型波为主。而 E_{0z} 只包含有电型波，B_{0z} 只包含有磁型波。

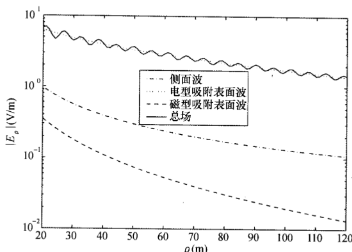


图 4-7　$E_{0\rho}$的总场、吸附表面波和侧面波在 $\varphi=0°$上随传播距离 ρ 的变化关系曲线

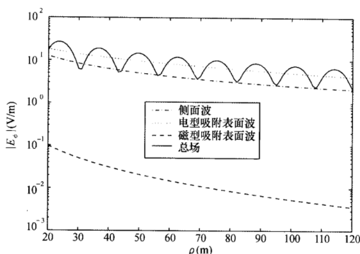


图 4-8　$E_{0\varphi}$的总场、吸附表面波和侧面波在 $\varphi=90°$上随传播距离 ρ 的变化关系曲线

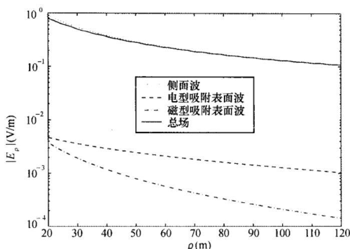


图 4-9　$E_{0\rho}$的总场、吸附表面波和侧面波在 $\varphi=0°$上随传播距离 ρ 的变化关系曲线

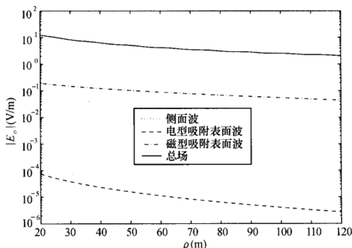


图 4-10　$E_{0\varphi}$的总场、吸附表面波和侧面波在 $\varphi=90°$上随传播距离 ρ 的变化关系曲线

如图 4-11 和图 4-12 所示为两种在不同介质厚度情况下的场分量 $E_{0\rho}$和 $E_{0\varphi}$随传播距离ρ 的变化关系曲线，计算所用参数为 $f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.85+0.01\text{i}$，$z=d=0\text{m}$。其中，实线代表厚度Ⅰ($k_1l=0.4\pi$)，虚线代表厚度Ⅱ($k_1l=0.8\pi$)。在第一种情况下，由于 $k_1l=0.4\pi<0.5\pi$，可以知道仅能激励起电型表面波分量，不能激励起磁型表面波分量；在第二种情况下，由于 $k_1l=0.8\pi>0.5\pi$，不仅有电型表面波分量存在，而且还有磁型表面波分量存在。由此可知，介质层的厚度对传播规律有着显著的影响。如果介质层的厚度继续增加，将激励出更多的表面波传播模式，干涉现象也将更加复杂。

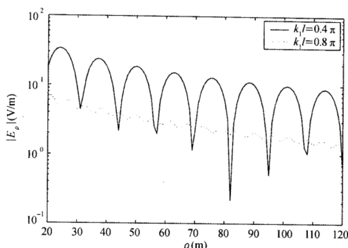


图 4-11　不同介质层厚度情况下 $E_{0\rho}$ 在 $\varphi=0°$ 上随传播距离 ρ 的变化关系曲线

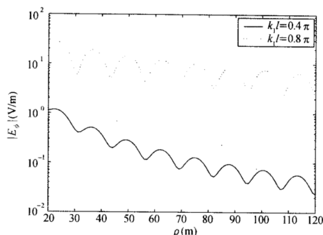


图 4-12　不同介质层厚度情况下 $E_{0\varphi}$ 在 $\varphi=90°$ 上随传播距离 ρ 的变化关系曲线

4.3　三层介质中的水平电偶极子产生的辐射场

4.2.3 节介绍了三层介质中的水平电偶极子激励的场分量的解析表达式，本节在此基础上进一步研究辐射场问题。

4.3.1 三层介质中的水平电偶极子产生的辐射场

现在我们进一步推导球坐标系下的远区场。在球坐标下，有如下关系式：

$$r_0=\sqrt{\rho^2+z^2},\quad \sin\Theta=\frac{\rho}{r_0},\quad \cos\Theta=\frac{z}{r_0} \tag{4-132}$$

在远区，满足条件 $k_0\rho\gg 1$。由于我们感兴趣的是当源点和场点离空气和介质层的边界面比较接近的情况，即 $d^2\ll r_0^2$。对幅度而言，可以取近似 $r_1\sim r_2\sim r_0$；对相位而言，则必须取近似 $r_1\sim r_0-d\cos\Theta$，$r_2\sim r_0+d\cos\Theta$。考虑到柱坐标系和球坐标系之间的关系，通过如下的关系式，容易得到球坐标系下的场分量表达式。

$$E_{0r}(r_0,\Theta,\Phi)=E_{0\rho}(\rho,\varphi,z)\sin\Theta+E_{0z}(\rho,\varphi,z)\cos\Theta \tag{4-133}$$

$$E_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi)=E_{0\rho}(\rho,\varphi,z)\cos\Theta+E_{0z}(\rho,\varphi,z)\sin\Theta \tag{4-134}$$

$$E_{0\Phi}(r_0,\Theta,\Phi)=E_{0\varphi}(\rho,\varphi,z) \tag{4-135}$$

$$B_{0r}(r_0,\Theta,\Phi)=B_{0\rho}(\rho,\varphi,z)\sin\Theta+B_{0z}(\rho,\varphi,z)\cos\Theta \tag{4-136}$$

$$B_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi)=B_{0\rho}(\rho,\varphi,z)\cos\Theta-B_{0z}(\rho,\varphi,z)\sin\Theta \tag{4-137}$$

$$B_{0\Phi}(r_0,\Theta,\Phi)=B_{0\varphi}(\rho,\varphi,z) \tag{4-138}$$

当远区条件同时满足 $|p_1^*|\geqslant 4$ 和 $|p_2^*|\geqslant 4$ 时，菲涅耳积分可以写成如下形式：

$$k_0^2\cdot \mathrm{i}T\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1^*}\cdot \boldsymbol{F}(p_1^*)=\frac{\mathrm{i}k_0\rho}{\rho^2}\cdot\frac{\mathrm{i}T}{\mathrm{i}T+(z+d)/\rho}+\frac{\mathrm{i}T}{\rho^2}\left[\frac{1}{\mathrm{i}T+(z+d)/\rho}\right]^3 \tag{4-139}$$

$$k_0^2\cdot(-\mathrm{i}A)\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2^*}\cdot \boldsymbol{F}(p_2^*)=\frac{\mathrm{i}k_0\rho}{\rho^2}\cdot\frac{-\mathrm{i}A}{-\mathrm{i}A+(z+d)/\rho}+\frac{-\mathrm{i}A}{\rho^2}\left[\frac{1}{-\mathrm{i}A+(z+d)/\rho}\right]^3 \tag{4-140}$$

将式(4-107)至式(4-112)代入式(4-133)至式(4-138)，并利用式(4-139)和式(4-140)，经过复杂的代数运算，可以得到球坐标系下的近似式。

$$\begin{aligned}
E_{0r}(r_0,\Theta,\Phi)=&-\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}l\cos\Phi}{2\pi k_0^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_0}\Bigg\{\frac{1}{r_0^2}\Big[2\mathrm{i}k_0\sin\Theta\sin(k_0d\cos\Theta)+\mathrm{i}k_0^2d\cos\Theta\sin\Theta\cos(k_0d\cos\Theta)\\
&-k_0^2r_0\sin\Theta\left(\frac{d}{r_0}\right)^2\sin(k_0d\cos\Theta)\Big]\cdot\Bigg[-\frac{k_0^2Ad+k_0+\mathrm{i}k_0^2r_0A^2\sin\Theta}{r_0^2\sin\Theta}\\
&+\frac{\mathrm{i}Tk_0r_0\left(\cos\Theta+\frac{d}{r_0}+\mathrm{i}T\sin\Theta\right)^2+T\sin\Theta}{r_0^3\left(\cos\Theta+\frac{d}{r_0}+\mathrm{i}T\sin\Theta\right)^3}\\
&+\frac{k_0^2A^2r_0\left(-\mathrm{i}A\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)^2(\mathrm{i}\cos\Theta+A\sin\Theta)+k_0A^2\sin\Theta\cos\Theta-\mathrm{i}k_0A^3\sin^2\Theta}{r_0^2\left(-\mathrm{i}A\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)^3}\Bigg]
\end{aligned}$$

$$
\cdot e^{ik_0 d\cos\Theta}\Bigg\} - \frac{\omega\mu_0 Idl\cos\Phi}{4} \cdot \Bigg\{ \sum \frac{\gamma_{0E}^{*}\gamma_{1E}^{*}\sin\Theta\tan(\gamma_{1E}^{*}l)}{q'(\lambda_{jE}^{*})}\exp[i\gamma_{0E}^{*}(r_0\cos\Theta+d)]\lambda_{jE}^{*}
$$

$$
\cdot [H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^{*}r_0\sin\Theta) - H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^{*}r_0\sin\Theta]
$$

$$
-\sum_j \frac{2i\cos\Theta\gamma_{1E}^{*}\tan(\gamma_{1E}^{*}l)}{q'(\lambda_{jE}^{*})}\exp[i\gamma_{0E}^{*}(r_0\cos\Theta+d)]
$$

$$
(\lambda_{jE}^{*})^2 \cdot H_1^{(1)}(\lambda_{jE}^{*}r_0\sin\Theta) + \sum_j \frac{\tan(\gamma_{1B}^{*}l)\sin\Theta}{p'(\lambda_{jB}^{*})}\exp[i\gamma_{0B}^{*}(r_0\cos\Theta+d)]
$$

$$
\cdot \lambda_{jB}^{*}[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^{*}r_0\sin\Theta) + H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^{*}r_0\sin\Theta)]\Bigg\} \tag{4-141}
$$

$$
E_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi) = -\frac{\omega\mu_0 Idl\cos\Phi}{2\pi k_0^2}e^{ik_0 r_0} \cdot \Bigg\{ \frac{1}{r_0^2}\Big[ik_0^2 d\cos(k_0 d\cos\Theta)(1+\cos^2\Theta)
$$

$$
+2ik_0\sin(k_0 d\cos\Theta)\cos\Theta - k_0^2 r_0\cos\Theta\sin(k_0 d\cos\Theta) - k_0^2 r_0\left(\frac{d}{r_0}\right)^2\cos\Theta\sin(k_0 d\cos\Theta)\Big]
$$

$$
+\Bigg[-\frac{k_0^2 A r_0 + k_0^2 A d\cos\Theta + k_0\cos\Theta + ik_0^2 A^2 r_0\sin\Theta\cos\Theta}{r_0^2\sin^2\Theta}
$$

$$
+\frac{k_0^2 r_0 A^2\left(\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}-iA\sin\Theta\right)^2(A\cos\Theta-i\sin\Theta) - A^2 k_0\sin^2\Theta - iA^3 k_0\sin\Theta\cos\Theta}{r_0^2\left(\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}-iA\sin\Theta\right)^3}
$$

$$
+\frac{iTk_0 r_0\cos\Theta\left(\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}+iT\sin\Theta\right)^2 + T\sin\Theta\cos\Theta}{r_0^3\sin\Theta\left(\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}+iT\sin\Theta\right)^3}\Bigg] e^{ik_0 d\cos\Theta}\Bigg\} - \frac{\omega\mu_0 Idl\cos\Phi}{4}
$$

$$
\cdot \Bigg\{ \sum_j \frac{\gamma_{0E}^{*}\gamma_{1E}^{*}\tan(\gamma_{1E}^{*}l)}{q'(\lambda_{jE}^{*})}\exp[i\gamma_{0E}^{*}(r_0\cos\Theta+d)](\lambda_{jE}^{*})^2
$$

$$
\cdot \cos\Theta[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^{*}r_0\sin\Theta) - H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^{*}\sin\Theta)]
$$

$$
+ 2i\sin\Theta\sum_j \frac{\gamma_{1E}^{*}\tan(\gamma_{1E}^{*}l)}{q'(\lambda_{jE}^{*})}\exp[i\gamma_{0E}(r_0\cos\Theta+d)] \cdot (\lambda_{jE}^{*})^2 H_1^{(1)}(\lambda_{jE}^{*}r_0\sin\Theta)
$$

$$
+ \cos\Theta\sum_j \frac{\tan(\gamma_{1B}^{*}l)}{p'(\lambda_{jB}^{*})}\exp[i\gamma_{0B}^{*}(r_0\cos\Theta+d)]
$$

$$
\cdot \lambda_{jB}^{*}[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^{*}r_0\sin\Theta) + H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^{*}r_0\sin\Theta)]\Bigg\} \tag{4-142}
$$

$$
E_{0\Phi}(r_0,\Theta,\Phi) = -\frac{\omega\mu_0 Idl\sin\Phi}{2\pi k_0^2}e^{ik_0 r_0}\Bigg\{ -\frac{k_0^2\sin(k_0 d\cos\Theta)}{r_0}
$$

$$
+\Bigg[\frac{iAk_0\cos\Theta + iAk_0\dfrac{d}{r_0} - k_0 A^2\sin\Theta - ik_0^2 r_0\sin^2\Theta}{r_0^2\sin^3\Theta}
$$

$$
-\frac{\mathrm{i}k_0 A^3 r_0\left(-\mathrm{i}A\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}\right)^2+A^3\sin\Theta}{r_0^3\sin\Theta\left(-\mathrm{i}A\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}\right)^3}
$$

$$
\left.\left.+\frac{-k_0^2 Tr_0\left(\mathrm{i}T\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}\right)^2+\mathrm{i}Tk_0\sin\Theta}{r_0^2\left(\mathrm{i}T\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}\right)^3}\right]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 d\cos\Theta}\right\}
$$

$$
-\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}l\sin\Phi}{4}\left\{\sum_j \frac{\gamma_{0E}^*\gamma_{1E}^*\tan(\gamma_{1E}^* l)}{q'(\lambda_{jE}^*)}\exp[\mathrm{i}\gamma_{0E}^*(r_0\cos\Theta+d)]\lambda_{jE}^*\right.
$$

$$
\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^* r_0\sin\Theta)+H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^* r_0\sin\Theta)]
$$

$$
+\sum_j \frac{\tan(\gamma_{1B}^* l)}{p'(\lambda_{jB}^*)}\exp[\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(r_0\cos\Theta+d)]
$$

$$
\left.\cdot\lambda_{jB}^*[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0\sin\Theta)-H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0\sin\Theta)]\right\} \tag{4-143}
$$

$$
B_{0r}(r_0,\Theta,\Phi)=-\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l\sin\Phi}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_0}\left\{\frac{\mathrm{i}k_0 d\sin\Theta\cos(k_0 d\cos\Theta)}{r_0^2}\right.
$$

$$
+\left[\frac{\mathrm{i}A-k_0 r_0\left(T\sin\Theta-\mathrm{i}\cos\Theta+\dfrac{\mathrm{i}r_0\sin\Theta\cos\Theta}{2}+\dfrac{\mathrm{i}d\sin\Theta}{2}\right)}{r_0^2\sin\Theta}\right.
$$

$$
+\frac{k_0 Tr_0\left(\mathrm{i}T\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}\right)^2(\cos\Theta+\mathrm{i}T\sin\Theta)+T\sin\Theta(T\sin\Theta-\mathrm{i}\cos\Theta)}{r_0^2\left(\mathrm{i}T\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}\right)^3}
$$

$$
\left.\left.+\frac{\mathrm{i}A^2\sin\Theta-k_0 A^2 r_0\left(-\mathrm{i}A\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}\right)^2}{k_0 r_0^3\left(-\mathrm{i}A\sin\Theta+\cos\Theta+\dfrac{d}{r_0}\right)^3}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 d\cos\Theta}\right\}-\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l\sin\Phi}{4}
$$

$$
\left\{\sum_j \frac{k_0^2\gamma_{1E}^*\sin\Theta\tan(\gamma_{1E}^* l)}{q'(\lambda_{jE}^*)}\exp[\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(r_0\cos\Theta+d)]\right.
$$

$$
\cdot\lambda_{jE}^*[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^* r_0\sin\Theta)+H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^* r_0\sin\Theta)]
$$

$$
+\sum_j \frac{\gamma_{0B}^*\sin\Theta\tan(\gamma_{1B}^* l)}{p'(\lambda_{jB}^*)}\exp[\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(r_0\cos\Theta+d)]
$$

$$
\cdot\lambda_{jB}^*[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0\sin\Theta)-H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0\sin\Theta)]
$$

$$
\left.-2\mathrm{i}\cos\Theta\sum_j \frac{\lambda_{jB}^{*2}\tan(\gamma_{1B}^* l)}{p'(\lambda_{jB}^*)}\exp[\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(r_0\cos\Theta+d)]\cdot H_1^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0\sin\Theta)\right\} \tag{4-144}
$$

$$B_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi)=-\frac{\mu_0 Idl\sin\Phi}{2\pi}e^{ik_0r_0}\left\{\frac{-k_0r_0\sin(k_0d\cos\Theta)+ik_0d\cos\Theta\cos(k_0d\cos\Theta)}{r_0^2}\right.$$

$$+\left[\frac{iA\cos\Theta-k_0r_0\sin\Theta\left(T\cos\Theta+i\sin\Theta+\frac{ir_0\cos^2\Theta}{2}+\frac{id\cos\Theta}{2}\right)}{r_0^2\sin^2\Theta}\right.$$

$$+\frac{k_0Tr_0\left(iT\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)^2(iT\cos\Theta-\sin\Theta)+T\sin\Theta(T\cos\Theta+i\sin\Theta)}{r_0^2\left(iT\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)^3}$$

$$\left.\left.+\frac{iA^2\sin\Theta\cos\Theta-k_0A^2r_0\cos\Theta\left(-iA\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)^2}{k_0r_0^3\sin\Theta\left(-iA\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)^3}\right]e^{ik_0d\cos\Theta}\right\}-\frac{\mu_0 Idl\sin\Phi}{4}$$

$$\cdot\left\{\sum_j\frac{k_0^2\gamma_{1E}^*\cos\Theta\tan(\gamma_{1E}^*l)}{q'(\lambda_{jE}^*)}\exp[i\gamma_{0E}^*(r_0\cos\Theta+d)]\cdot\lambda_{jE}^*[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)\right.$$

$$+H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)]$$

$$+\sum_j\frac{\gamma_{0B}^*\cos\Theta\tan(\gamma_{1B}^*l)}{p'(\lambda_{jB}^*)}e^{i\gamma_{0B}^*(r_0\cos\Theta+d)}\cdot\lambda_{jB}^*[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*r_0\sin\Theta)-H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*r_0\sin\Theta)]$$

$$\left.+\sum_j\frac{2i\lambda_{jB}^{*2}\sin\Theta\tan(\gamma_{1B}^*l)}{p'(\lambda_{jB}^*)}e^{i\gamma_{0B}^*(r_0\cos\Theta+d)}\cdot H_1^{(1)}(\lambda_{jB}^*r_0\sin\Theta)\right\}\tag{4-145}$$

$$B_{0\Phi}(r_0,\Theta,\varphi)=-\frac{\mu_0 Idl\cos\Phi}{2\pi}e^{ik_0r_0}\left\{\frac{-k_0r_0\cos\Theta\sin(k_0d\cos\Theta)+ik_0d\cos(k_0d\cos\Theta)}{r_0^2}\right.$$

$$+\left[-\frac{k_0Ar_0\sin\Theta+\frac{r_0\cos\Theta}{2}+\frac{d}{2}-iT}{r_0^2\sin^2\Theta}-\frac{ik_0A^2r_0\left(-iA\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)^2+A^2\sin\Theta}{r_0^2\left(-iA\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)^3}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{k_0T^2r_0\left(iT\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)^2-iT^2\sin\Theta}{k_0r_0^3\sin\Theta\left(iT\sin\Theta+\cos\Theta+\frac{d}{r_0}\right)^3}\right]e^{ik_0d\cos\Theta}\right\}-\frac{\mu_0 Idl\cos\Phi}{4}$$

$$\cdot\left\{k_0^2\sum_j\frac{\gamma_{1E}^*\tan(\gamma_{1E}^*l)}{q'(\lambda_{1E}^*)}e^{i\gamma_{0E}^*(r_0\cos\Theta+d)}\cdot\lambda_{jE}^*\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)-H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)]\right.$$

$$\left.+\sum_j\frac{\gamma_{0B}^*\tan(\gamma_{1B}^*l)}{p'(\lambda_{jB}^*)}\cdot\lambda_{jB}^*\cdot e^{i\gamma_{0B}^*(r_0\cos\Theta+d)}\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*r_0\sin\Theta)+H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*r_0\sin\Theta)]\right\}$$

$$\tag{4-146}$$

在实际应用中，天线通常放置在地球表面。在这种情况下，$d/r_0\sim0$，$k_0d\sim0$，电磁场分量中式(4-141)至式(4-146)可简化为

$$E_{0r}(r_0,\Theta,\Phi)=-\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}l\cos\Phi}{2\pi k_0^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_0}\cdot\left\{-\frac{k_0+\mathrm{i}k_0^2r_0A^2\sin\Theta}{r_0^2\sin\Theta}\right.$$
$$+\frac{\mathrm{i}Tk_0r_0(\cos\Theta+\mathrm{i}T\sin\Theta)^2+T\sin\Theta}{r_0^3(\cos\Theta+\mathrm{i}T\sin\Theta)^3}$$
$$\left.+\frac{k_0^2A^2r_0(-\mathrm{i}A\sin\Theta+\cos\Theta)^2(\mathrm{i}\cos\Theta+A\sin\Theta)+A^2k_0\sin\Theta\cos\Theta-\mathrm{i}k_0A^3\sin^2\Theta}{r_0^2(-\mathrm{i}A\sin\Theta+\cos\Theta)^3}\right\}$$
$$-\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}l\cos\Phi}{4}\cdot\left\{\sum_j\frac{\gamma_{0E}^*\gamma_{1E}^*\sin\Theta\tan(\gamma_{1E}^*l)}{q'(\lambda_{jE}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^*r_0\cos\Theta}\lambda_{jE}^*\right.$$
$$\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)-H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)]$$
$$-\sum_j\frac{2\mathrm{i}\cos\Theta\gamma_{1E}^*\tan(\gamma_{1E}^*l)}{q'(\lambda_{jE}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^*r_0\cos\Theta}(\lambda_{jE}^*)^2\cdot[H_1^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)]$$
$$+\sum_j\frac{\tan(\gamma_{1B}^*l)\sin\Theta}{p'(\lambda_{jB}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*r_0\cos\Theta}\cdot\lambda_{jB}^*[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*r_0\sin\Theta)$$
$$\left.+H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*r_0\sin\Theta)]\right\}\tag{4-147}$$

$$E_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi)=-\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}l\cos\Phi}{2\pi k_0^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_0}\cdot\left\{-\frac{k_0^2Ar_0+k_0\cos\Theta+\mathrm{i}k_0^2A^2r_0\sin\Theta\cos\Theta}{r_0^2\sin^2\Theta}\right.$$
$$+\frac{k_0^2r_0A^2(\cos\Theta-\mathrm{i}A\sin\Theta)^2(A\cos\Theta-\mathrm{i}\sin\Theta)-k_0A^2\sin^2\Theta-\mathrm{i}A^3k_0\sin\Theta\cos\Theta)}{r_0^2(\cos\Theta-\mathrm{i}A\sin\Theta)^3}$$
$$\left.+\frac{\mathrm{i}Tk_0r_0\cos\Theta(\cos\Theta+\mathrm{i}T\sin\Theta)^2+T\sin\Theta\cos\Theta}{r_0^3\sin\Theta(\cos\Theta+\mathrm{i}T\sin\Theta)^3}\right\}$$
$$-\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}l\cos\Phi}{4}\left\{\sum_j\frac{\gamma_{0E}^*\gamma_{1E}^*\tan(\gamma_{1E}^*l)}{q'(\lambda_{jE}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^*r_0\cos\Theta}\lambda_{jE}^*\cos\Theta[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)\right.$$
$$-H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)]+2\mathrm{i}\sin\Theta\sum_j\frac{\gamma_{1E}^*\tan(\gamma_{1E}^*l)}{q'(\lambda_{jE}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^*r_0\cos\Theta}(\lambda_{jE}^*)^2H_1^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)$$
$$\left.+\cos\Theta\sum_j\frac{\tan(\gamma_{1B}^*l)}{p'(\lambda_{jB}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*r_0\cos\Theta}\cdot\lambda_{jB}^*[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*r_0\sin\Theta)+H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*r_0\sin\Theta)]\right\}\tag{4-148}$$

$$E_{0\Phi}(r_0,\Theta,\Phi)=-\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}l\sin\Phi}{2\pi k_0^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_0}\left\{\frac{\mathrm{i}Ak_0\cos\Theta-k_0A^2\sin\Theta-\mathrm{i}k_0^2r_0\sin^2\Theta}{r_0^2\sin^3\Theta}\right.$$
$$\left.-\frac{\mathrm{i}k_0A^3r_0(-\mathrm{i}A\sin\Theta+\cos\Theta)^2+A^3\sin\Theta}{r_0^3\sin\Theta(-\mathrm{i}A\sin\Theta+\cos\Theta)^3}+\frac{-k_0^2Tr_0(\mathrm{i}T\sin\Theta+\cos\Theta)^2+\mathrm{i}Tk_0\sin\Theta}{r_0^2(\mathrm{i}T\sin\Theta+\cos\Theta)^3}\right\}$$
$$-\frac{\omega\mu I\mathrm{d}l\sin\Phi}{4}\left\{\sum_j\frac{\gamma_{0E}^*\gamma_{1E}^*\tan(\gamma_{1E}^*l)}{q'(\lambda_{jE}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^*r_0\cos\Theta}\cdot\lambda_{jE}^*[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)\right.$$
$$+H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*r_0\sin\Theta)]$$

$$+\sum_j \frac{\tan(\gamma_{1B}^* l)}{p'(\lambda_{jB}^*)} e^{i\gamma_{0B}^* r_0 \cos\Theta} \cdot \lambda_{jB}^* [H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0 \sin\Theta) - H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0 \sin\Theta)] \Bigg\} \tag{4-149}$$

$$B_{0r}(r_0,\Theta,\Phi) = -\frac{\mu_0 Idl\sin\Phi}{2\pi} e^{ik_0 r_0} \Bigg\{ \frac{iA - k_0 r_0 \left(T\sin\Theta - i\cos\Theta + \frac{ir_0 \sin\Theta\cos\Theta}{2}\right)}{r_0^2 \sin\Theta}$$

$$+\frac{k_0 T r_0 (iT\sin\Theta + \cos\Theta)^2 (\cos\Theta + iT\sin\Theta) + T\sin\Theta(T\sin\Theta - i\cos\Theta)}{r_0^2 (iT\sin\Theta + \cos\Theta)^3}$$

$$+\frac{iA^2\sin\Theta - k_0 A^2 r_0 (-iA\sin\Theta + \cos\Theta)^2}{k_0 r_0^3 (-iA\sin\Theta + \cos\Theta)^3} \Bigg\} - \frac{\mu_0 Idl\sin\Phi}{4}$$

$$\Bigg\{ \sum_j \frac{k_0^2 \gamma_{1E}^* \sin\Theta \tan(\gamma_{1E}^* l)}{q'(\lambda_{jE}^*)} e^{i\gamma_{0E}^* r_0 \cos\Theta} \cdot \lambda_{jE}^* [H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^* r_0 \sin\Theta) + H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^* r_0 \sin\Theta)]$$

$$+\sum_j \frac{\gamma_{0B}^* \sin\Theta \tan(\gamma_{1B}^* l)}{p'(\lambda_{jB}^*)} e^{i\gamma_{0B}^* r_0 \cos\Theta} \cdot \lambda_{jB}^* [H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0 \sin\Theta) - H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0 \sin\Theta)]$$

$$-2i\cos\Theta \sum_j \frac{\lambda_{jB}^{*2} \tan(\gamma_{1B}^* l)}{p'(\lambda_{jB}^*)} e^{i\gamma_{0B}^* r_0 \cos\Theta} \cdot H_1^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0 \sin\Theta) \Bigg\} \tag{4-150}$$

$$B_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi) = -\frac{\mu_0 Idl\sin\Phi}{2\pi} e^{ik_0 r_0} \Bigg\{ \frac{iA\cos\Theta - k_0 r_0 \sin\Theta\left(T\cos\Theta + i\sin\Theta + \frac{ir_0\cos^2\Theta}{2}\right)}{r_0^2 \sin^2\Theta}$$

$$+\frac{k_0 T r_0 (iT\sin\Theta + \cos\Theta)^2 (iT\cos\Theta - \sin\Theta) + T\sin\Theta(T\cos\Theta + i\sin\Theta)}{r_0^2 (iT\sin\Theta + \cos\Theta)^3}$$

$$+\frac{iA^2 \sin\Theta\cos\Theta - k_0 A^2 r_0 \cos\Theta(-iA\sin\Theta + \cos\Theta)^2}{k_0 r_0^3 \sin\Theta(-iA\sin\Theta + \cos\Theta)^3} \Bigg\}$$

$$-\frac{\mu_0 Idl\sin\Phi}{4} \Bigg\{ \sum_j \frac{k_0^2 \gamma_{1E}^* \cos\Theta \tan(\gamma_{1E}^* l)}{q'(\lambda_{jE}^*)} e^{i\gamma_{0E}^* r_0 \cos\Theta}$$

$$\cdot \lambda_{jB}^* [H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0 \sin\Theta) - H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0 \sin\Theta)]$$

$$+\sum_j \frac{\gamma_{0B}^* \cos\Theta \tan(\gamma_{1B}^* l)}{p'(\lambda_{jB}^*)} e^{i\gamma_{0B}^* r_0 \cos\Theta} \cdot \lambda_{jB}^* [H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0 \sin\Theta) - H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0 \sin\Theta)]$$

$$+\sum_j \frac{2i\gamma_{jB}^{*2} \sin\Theta \tan(\lambda_{1B}^* l)}{p'(\lambda_{jB}^*)} e^{i\gamma_{0B}^* r_0 \cos\Theta} \cdot H_1^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0 \sin\Theta) \Bigg\} \tag{4-151}$$

$$B_{0\Phi}(r_0,\Theta,\Phi) = -\frac{\mu_0 Idl\cos\Phi}{2\pi} e^{ik_0 r_0} \Bigg\{ -\frac{k_0 A r_0 \sin\Theta + \frac{r_0\cos\Theta}{2} - iT}{r_0^2 \sin^2\Theta}$$

$$-\frac{ik_0 A^2 r_0 (-iA\sin\Theta + \cos\Theta)^2 + A^2 \sin\Theta}{r_0^2 (-iA\sin\Theta + \cos\Theta)^3}$$

$$
+\frac{k_0 T^2 r_0 (\mathrm{i}T\sin\Theta+\cos\Theta)^2-\mathrm{i}T^2\sin\Theta}{k_0 r_0^3\sin\Theta(\mathrm{i}T\sin\Theta+\cos\Theta)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 d\cos\theta}\Bigg\}
$$

$$
-\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l\cos\Phi}{4}\Bigg\{k_0^2\sum_j\frac{\gamma_{1E}^*\tan(\gamma_{1E}^* l)}{q'(\lambda_{jE}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^* r_0\cos\Theta}
$$

$$
\cdot\lambda_{jE}^*\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^* r_0\sin\Theta)-H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^* r_0\sin\Theta)]
$$

$$
+\sum_j\frac{\gamma_{0B}^*\tan(\gamma_{1B}^* l)}{p'(\lambda_{jB}^*)}\cdot\lambda_{jB}^*\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^* r_0\cos\Theta}
$$

$$
\cdot[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0\sin\Theta)+H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^* r_0\sin\Theta)]\Bigg\}\tag{4-152}
$$

4.3.2 微带天线

微带天线是由带状传输线及位于涂覆在高电导率(可认为是理想导电体)基底上的很薄的电介质表面上的天线组成的。这类天线最基本的单元是水平电偶极子。接下来,我们讨论如图 4-13 所示的由传输线在末端激励的矩形贴片天线。

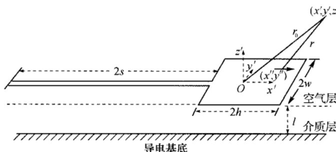


图 4-13 传输线末端激励的矩形贴片天线

长和宽分别为 $2h$ 和 $2w$ 的贴片天线的电流密度分布如下:

$$
J_x(x'',y'')=\frac{I_x(0)}{2w}\cos(k_L x'')\qquad\begin{cases}-h\leqslant x''\leqslant h\\-w\leqslant y''\leqslant w\end{cases}\tag{4-153}
$$

式中:$k_L=k_0\sqrt{\varepsilon_{r1\mathrm{eff}}}$表示贴片的波数。贴片作为微带传输线的一部分,$\varepsilon_{r1\mathrm{eff}}$是它在工作频率下的相对有效介电系数,$I_x(0)$是通过贴片中心线 $x''=0$ 的总电流。在当前的研究中,我们假设 $\hat{x}'$方向的横向电流分布为单位电流。事实上,$\hat{y}'$方向上的电流在边界 $|y''|=w$ 处有很大的尖峰,而在 $y''=0$ 处最小。当激励点的电流与 $I_x(0)$相比很小时,则贴片的特征阻抗很大,因此式(4-153)中假定的电流是一个很好的近似表达式。微带传输线的特征阻抗 Z_c 以及相对有效介电系数 $\varepsilon_{1\mathrm{reff}}$的近似表达式在 Hoffman 的著作[121]中以式(3.20)到式(3.22)给出。相对有效介电系数 $\varepsilon_{1\mathrm{reff}}$的近似表达式可表示为

$$\varepsilon_{r1\text{eff}}=\frac{\varepsilon_{r1}+1}{2}+\frac{\varepsilon_{r1}-1}{2}\left(1+\frac{5l}{w}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4-154}$$

在远区，对幅度而言，可作近似 $r\sim r_0=(x'^2+y'^2+z'^2)$，对相位而言，需要采用更准确的近似表达式：

$$r\sim(r_0^2-2x'x''-2y'y'')^{\frac{1}{2}}=r_0\left(1-2\frac{x'x''}{r_0^2}-2\frac{y'y''}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4-155}$$

参照 King 等人的专著[30]中 15.12 节所述步骤，并对幅度和相位采用上述近似，则贴片天线的场因子能够表示成如下形式：

$$\begin{aligned}P(\Theta,\Phi)&=\frac{I_x(0)}{2w}J(x'')J(y'')\\&=I_x(0)\left[\frac{2k_L\sin(k_Lh)\cos(k_0h\sin\Theta\cos\Phi)-2k_0\sin\Theta\cos\Phi\cos(k_Lh)\sin(k_0h\sin\Theta\cos\Phi)}{k_L^2-k_0^2\cos^2\varphi\sin^2\Theta}\right]\\&\quad\cdot\left[\frac{\sin(k_0w\sin\Phi\sin\Theta)}{k_0w\sin\Phi\sin\Theta}\right]\end{aligned} \tag{4-156}$$

如果选择 h 满足条件 $k_Lh=\pi/2$，则式(4-156)中的场因子可以简化为文献[30]中的式(15.12.14)或文献[61]中的式(9-159)。将式(4-147)、式(4-148)、式(4-150)和式(4-151)乘上贴片天线的场因子式(4-154)，即获得贴片天线的远区场分量。

$$[E_{0\Theta}^r(r_0,\Theta,\Phi)]_p=E_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi)\cdot P(\Theta,\Phi) \tag{4-157}$$

$$[B_{0\Theta}^r(r_0,\Theta,\Phi)]_p=B_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi)\cdot P(\Theta,\Phi) \tag{4-158}$$

$$[E_{0\Phi}^r(r_0,\Theta,\Phi)]_p=E_{0\Phi}(r_0,\Theta,\Phi)\cdot P(\Theta,\Phi) \tag{4-159}$$

$$[B_{0\Phi}^r(r_0,\Theta,\Phi)]_p=B_{0\Phi}(r_0,\Theta,\Phi)\cdot P(\Theta,\Phi) \tag{4-160}$$

值得注意的是，上述表达式只对远区场有效，而对于相对较近的区域来说则不适用。

4.3.3 典型条件下的计算和讨论

如图 4-14 和图 4-15 所示为贴片天线辐射的电场分量 $[E_{0\Theta}^r(r_0,\Theta,\Phi)]_p$ 和 $[E_{0\Phi}^r(r_0,\Theta,\Phi)]_p$ 随角度 Φ 变化的关系曲线。计算所采用的参数如下。可以发现：在 $d=0$m，$\Theta=\pi/2$ 的条件下，总场的幅度主要由吸附表面波决定。也就是说，当源点和场点都位于空气层和介质层分界面上时，总场主要是由吸附表面波决定的。

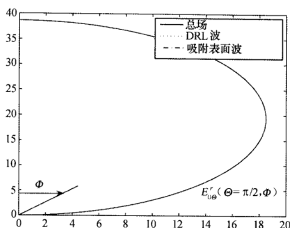


图 4-14　贴片天线辐射的电场分量$[E^r_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi)]_p$随着角度$\Phi$变化的关系曲线：

$f=1\text{GHz},\varepsilon_{r1}=2,r_0=10\text{m},k_Lh=\frac{\pi}{2},\omega=h,l=0.05\text{m},d=0\text{m},I_0=1\text{A},\Theta=\frac{\pi}{2}$

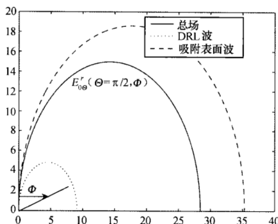


图 4-15　贴片天线辐射的电场分量$[E^r_{0\Phi}(r_0,\Theta,\Phi)]_p$随角度$\Phi$变化的关系曲线：

$f=1\text{GHz},\varepsilon_{r1}=2,r_0=15\text{m},k_Lh=\frac{\pi}{2},w=h,l=0.1\text{m},d=0\text{m},I_0=1\text{A},\Theta=\frac{\pi}{2}$

如图 4-16 和图 4-17 所示分别为贴片天线的两个场分量$[E^r_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi)]_p$和$[E^r_{0\Phi}(r,\Theta,\Phi)]_p$的三维图。其中，最里面的那条曲线表示$\Theta=86°$，而最外面的那条曲线表示$\Theta=90°$。计算所采用的参数和图 4-14 和图 4-15 相同。对场分量$[E^r_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi)]_p$来说，辐射场最强的区域集中在$\Theta=\pi/2,\Phi=0$或$\pi$附近。对场分量$[E^r_{0\Phi}(r_0,\Theta,\Phi)]_p$来说，辐射场最强的区域集中在$\Theta=\pi/2,\Phi=\pi/2$附近。

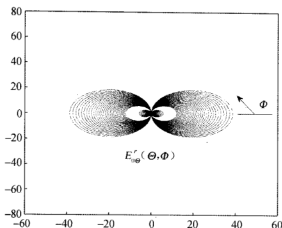


图 4-16　贴片天线激励的电场分量$[E^r_{0\Theta}(r_0,\Theta,\Phi)]_p$的辐射场的三维图：

$f=1\text{GHz},\varepsilon_{r1}=2,r_0=10\text{m},k_Lh=\frac{\pi}{2},\omega=h,l=0.05\text{m},d=0\text{m},I_0=1\text{A}$

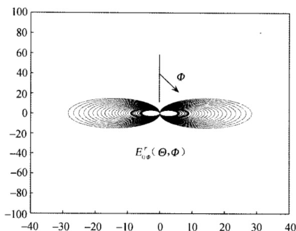


图 4-17　贴片天线激励的电场分量$[E^r_{0\Phi}(r_0,\Theta,\Phi)]_p$的辐射场的三维图：

$f=1\text{GHz},\varepsilon_{r1}=2,r_0=15\text{m},k_Lh=\frac{\pi}{2},\omega=h,l=0.1\text{m},d=0\text{m},I_0=1\text{A}$

4.4　本章小结

本章分析研究了理想导电基底情况下水平电偶极子在三层介质中的电磁场和辐射场问题，并应用于微带天线的计算。对于非理想导电基底，情况要复杂一些，电磁场特性有了一些变化，张红旗等人已经对这种情况作了深入研究[94]。对于中间介质

层为单轴各向异性介质的情况，情况更加复杂，电磁场特性有了更显著的变化，本书作者[96]和他的学生梅建萍[97]对理想导电基底和非理想导电基底两种情况作了深入研究。由于上述几方面的研究所用方法都和本章的方法相类似，所以没有把这些内容包括进来。

第 5 章

垂直电偶极子在四层介质中激励的电磁场

第 3 章介绍了垂直电偶极子在三层介质中激励的电磁场的完整解析表达式。电磁场分量可以分解为直射波、理想反射波、吸附表面波和侧面波四部分。显然，对四层介质而言，也应当有相似的特性。本章将导出单位垂直电偶极子在四层介质中激励的电磁场的完整解析表达式，并给出相应的计算结果[98]。

5.1 电磁波场分量的积分表达式

本章所研究的问题的物理模型如图 5-1 所示。利用第 3 章中“垂直电偶极子在三层介质中激励的电磁场的积分表达式”相似的推导过程，也可以推出垂直电偶极子在四层介质中激励的电磁场的积分表达式。这里，我们由 King 等人的专著[30]中的式(11.5.1)至式(11.5.3)直接导出单位垂直电偶极子在四层介质中激励的电磁场的

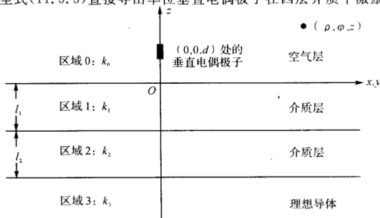


图 5-1 垂直电偶极子在四层介质中激励的电磁场

积分表达式。

$$B_{0\varphi}(\rho,z)=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi}\int_0^{\infty}\gamma_0^{-1}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}-(Q+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\right]J_1(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{5-1}$$

$$E_{0\rho}(\rho,z)=\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\left[\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}-(Q+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\right]J_1(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \quad \begin{matrix} d<z \\ 0\leqslant z\leqslant d\end{matrix} \tag{5-2}$$

$$E_{0z}(\rho,z)=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\gamma_0^{-1}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}-(Q+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\right]J_0(\lambda\rho)\lambda^3\mathrm{d}\lambda \tag{5-3}$$

其中

$$\gamma_j=\sqrt{k_j^2-\lambda^2},\quad j=0,1,2 \tag{5-4}$$

$$k_j=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_j},\quad j=0,1,2 \tag{5-5}$$

这里，由于我们假定基底为理想导体的情况，即

$$k_3\to\infty \tag{5-6}$$

于是

$$Q=-\frac{\gamma_0+\dfrac{k_0^2}{\omega\mu_0}\dfrac{\mathrm{i}\omega\mu_0\gamma_1}{k_1^2}\dfrac{\gamma_1k_2^2\tan\gamma_1l_1+\gamma_2k_1^2\tan\gamma_2l_2}{\gamma_1k_2^2-\gamma_2k_1^2\tan\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2}}{\gamma_0-\dfrac{k_0^2}{\omega\mu_0}\dfrac{\mathrm{i}\omega\mu_0\gamma_1}{k_1^2}\dfrac{\gamma_1k_2^2\tan\gamma_1l_1+\gamma_2k_1^2\tan\gamma_2l_2}{\gamma_1k_2^2-\gamma_2k_1^2\tan\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2}} \tag{5-7}$$

为了方便起见，我们将式(5-1)至式(5-3)写成如下形式：

$$B_{0\varphi}(\rho,z)=B_{0\varphi}^{(1)}+B_{0\varphi}^{(2)}+B_{0\varphi}^{(3)} \tag{5-8}$$

$$E_{0\rho}(\rho,z)=E_{0\rho}^{(1)}+E_{0\rho}^{(2)}+E_{0\rho}^{(3)} \tag{5-9}$$

$$E_{0z}(\rho,z)=E_{0z}^{(1)}+E_{0z}^{(2)}+E_{0z}^{(3)} \tag{5-10}$$

其中

$$B_{0\varphi}^{(1)}=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi}\int_0^{\infty}\gamma_0^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}J_1(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{5-11}$$

$$B_{0\varphi}^{(2)}=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi}\int_0^{\infty}\gamma_0^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}J_1(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{5-12}$$

$$E_{0\rho}^{(1)}=\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}J_1(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{5-13}$$

$$E_{0\rho}^{(2)}=\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}J_1(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{5-14}$$

$$E_{0z}^{(1)}=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\gamma_0^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}J_0(\lambda\rho)\lambda^3\mathrm{d}\lambda \tag{5-15}$$

$$E_{0z}^{(2)}=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\int_0^{\infty}\gamma_0^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}J_0(\lambda\rho)\lambda^3\mathrm{d}\lambda \tag{5-16}$$

式(5-8)到式(5-10)中的第一项和第二项分别表示直射波和理想反射波。这两项与两层和三层媒质的情况完全相同，已经在很多年前由 King 等人求解出来[30][67]。接下来估算式(5-8)至式(5-10)中的第三项。由于 γ_0、γ_1 和 γ_2 是关于 λ 的偶函数，以及贝塞尔函数和汉克尔函数之间的关系为

$$J_n(\lambda\rho)=\frac{1}{2}[H_n^{(1)}(\lambda\rho)+H_n^{(2)}(\lambda\rho)] \tag{5-17}$$

$$H_n^{(1)}(-\lambda\rho)=H_n^{(2)}(\lambda\rho)(-1)^{n+1} \tag{5-18}$$

所以，式(5-8)至式(5-10)中的第三项可表示为

$$B_{0\varphi}^{(3)}=-\frac{\mu_0 k_0^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_1 k_2^2\tan\gamma_1 l_1+\gamma_2 k_1^2\tan\gamma_2 l_2}{q(\lambda)\gamma_0}\cdot\gamma_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}H_1^{(1)}(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{5-19}$$

$$E_{0\rho}^{(3)}=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_1 k_2^2\tan\gamma_1 l_1+\gamma_2 k_1^2\tan\gamma_2 l_2}{q(\lambda)}\cdot\gamma_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}H_1^{(1)}(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{5-20}$$

$$E_{0z}^{(3)}=-\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_1 k_2^2\tan\gamma_1 l_1+\gamma_2 k_1^2\tan\gamma_2 l_2}{q(\lambda)\gamma_0}\cdot\gamma_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}H_0^{(1)}(\lambda\rho)\lambda^3\mathrm{d}\lambda \tag{5-21}$$

其中

$$q(\lambda)=k_1^2\gamma_0(\gamma_1 k_2^2-\gamma_2 k_1^2\tan\gamma_1 l_1\tan\gamma_2 l_2)-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1(\gamma_1 k_2^2\tan\gamma_1 l_1+\gamma_2 k_1^2\tan\gamma_2 l_2) \tag{5-22}$$

下面，我们的主要任务是利用解析方法估算式(5-19)至式(5-21)中的三个积分。

5.2 吸附表面波和侧面波

为了求解方便起见，需要将式(5-19)分解成两部分：

$$B_{0\varphi}^{(3)}=B_{0\varphi}^{(3,1)}+B_{0\varphi}^{(3,2)} \tag{5-23}$$

其中

$$B_{0\varphi}^{(3,1)}=-\frac{\mu_0 k_0^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_1\gamma_2 k_1^2\tan\gamma_2 l_2}{q(\lambda)\gamma_0}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}H_1^{(1)}(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{5-24}$$

$$B_{0\varphi}^{(3,2)}=-\frac{\mu_0 k_0^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_1^2 k_2^2\tan\gamma_1 l_1}{q(\lambda)\gamma_0}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}H_1^{(1)}(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{5-25}$$

为了求解式(5-24)和式(5-25)中的积分，需要确定极点和支点的位置。式(5-24)和式(5-25)中被积函数的支点分别位于 $\lambda=k_0$，$\lambda=k_1$ 和 $\lambda=k_2$。为了将根式函数 γ_0、γ_1 和 γ_2 分解成单值分支，在 λ 的复平面上分别以 $\lambda=k_0$，$\lambda=k_1$ 和 $\lambda=k_2$ 为端点取平行于虚轴的三条割缝，如图 5-2 所示。

首先，考虑极点方程，即

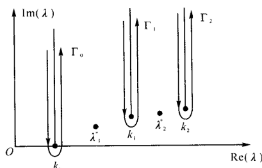


图 5-2　被积函数的极点和支点示意图

$$q(\lambda)=k_1^2\gamma_0(\gamma_1k_2^2-\gamma_2k_1^2\tan\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2)-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1(\gamma_1k_2^2\tan\gamma_1l_1+\gamma_2k_1^2\tan\gamma_2l_2)=0 \tag{5-26}$$

与第 3 章所述的三层介质情况相比较，我们发现极点方程要复杂很多。对我们感兴趣的四层介质结构而言，满足关系式 $k_0\leqslant k_1\leqslant k_2$ 及 $k_3\to\infty$。显然，在 $\lambda<k_0$ 和 $\lambda>k_2$ 两种情况下，极点是不存在的，而在区间 $k_0\leqslant\lambda\leqslant k_1$ 和 $k_1\leqslant\lambda\leqslant k_2$ 内才有可能存在极点。图 5-3 和图 5-4 所示为利用牛顿迭代法求解出来的极点。图 5-3 所用参数为 $f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.65$，$\varepsilon_{r2}=4.0$，$l_1=l_2=0.8\text{m}$；图 5-4 所用参数为 $f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.65$，$\varepsilon_{r2}=4.0$，$l_1=3.0\text{m}$，$l_2=1.0\text{m}$。结果表明：在区间 $k_0\leqslant\lambda\leqslant k_1$ 和 $k_1\leqslant\lambda\leqslant k_2$ 内可以存在极点。需要指出的是，在应用留数定理时，k_1 存在于围道之外，是可去的极点，因此它对积分的贡献为零。

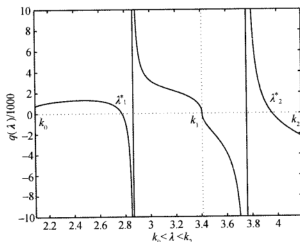


图 5-3　极点方程(5-26)的根：$f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.65$，$\varepsilon_{r2}=4.0$，$l_1=l_2=0.8\text{m}$

在割缝 Γ_0 的两侧，积分表达式是关于 γ_0 的偶函数；而在 Γ_1 和 Γ_2 两侧，积分表达式分别是关于 γ_1 和 γ_2 的奇函数。这与第 3 章的情形相似，式(5-24)和式(5-25)沿割缝 Γ_1 和 Γ_2 的积分为零。于是，式(5-24)中的积分可以表示为由极点的留数和绕围道的积分两部分组成，即

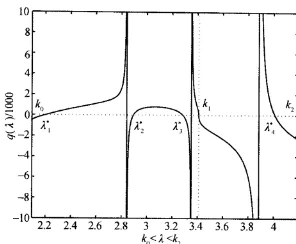


图 5-4　极点方程(5-26)的根：$f=100\text{MHz}, \varepsilon_{r1}=2.65, \varepsilon_{r2}=4.0, l_1=3.0\text{m}, l_2=1.0\text{m}$

$$B_{0\varphi}^{(3.1)}=2\pi \mathrm{i}\frac{-\mu_0 k_0^2}{4\pi}\sum_j \frac{k_1^2\gamma_1(\lambda_j^*)\gamma_2(\lambda_j^*)\tan(\gamma_2(\lambda_j^*)l_2)}{q'(\lambda_j^*)\gamma_0(\lambda_j^*)}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j^*)(z+d)}H_1^{(1)}(\lambda_j^*\rho)\lambda_j^{*2}$$
$$-\frac{\mu_0 k_0^2}{4\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{\gamma_1\gamma_2 k_1^2\tan\gamma_2 l_2}{q(\lambda)\gamma_0}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}H_1^{(1)}(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{5-27}$$

其中

$$q'(\lambda)=-k_1^2\frac{\lambda}{\gamma_0}(\gamma_1 k_2^2-\gamma_2 k_1^2\tan\gamma_1 l_1\tan\gamma_2 l_2)+\mathrm{i}k_0^2\frac{\lambda}{\gamma_1}(\gamma_1 k_2^2\tan\gamma_1 l_1+\gamma_2 k_1^2\tan\gamma_2 l_2)$$
$$+k_1^2\gamma_0\left[-\frac{\lambda}{\gamma_1}k_2^2+\frac{\lambda}{\gamma_2}k_1^2\tan\gamma_1 l_1\tan\gamma_2 l_2+k_1^2\gamma_2\lambda\left(\frac{l_1}{\gamma_1}\sec^2\gamma_1 l_1\tan\gamma_2 l_2+\frac{l_2}{\gamma_2}\tan\gamma_1 l_1\sec^2\gamma_2 l_2\right)\right]$$
$$+\mathrm{i}k_0^2\gamma_1\lambda\cdot\left(\frac{k_2^2\tan\gamma_1 l_1}{\gamma_1}+\frac{k_1^2\tan\gamma_2 l_2}{\gamma_2}+k_2^2 l_1\sec^2\gamma_1 l_1+k_1^2 l_2\sec^2\gamma_2 l_2\right) \tag{5-28}$$

在割缝 Γ_0 两侧，取 $\lambda=k_0(1+\mathrm{i}\tau^2)$，此时

$$H_1^{(1)}(\lambda\rho)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0\rho-\frac{3}{4}\pi)}\cdot \mathrm{e}^{-k_0\rho\tau^2} \tag{5-29}$$

在远区条件 $k_0\rho\gg 1$ 和 $(z+d)\ll\rho$ 成立的情况下，沿割缝 Γ_0 的积分主要来自于 k_0 附近的贡献。可得近似表达式为

$$\gamma_0=\sqrt{k_0^2-\lambda^2}\approx k_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}\sqrt{2}\tau \tag{5-30}$$

在割缝 Γ_0 的左侧，γ_0 的幅角变为 $-\pi/4$，τ 从 $-\infty$ 变至 0，当 λ 绕支点逆时针转过 90°到达实轴时，γ_0 的幅角变为 $\pi/2$；在割缝 Γ_0 的右侧，τ 从 0 变至 $+\infty$，γ_0 的幅角为 $3\pi/4$，因此在此路径上靠近 k_0 时，γ_1 和 γ_2 可以作如下近似：

$$\gamma_1=\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\approx\sqrt{k_1^2-k_0^2}=\gamma_{10} \tag{5-31}$$

$$\gamma_2=\sqrt{k_2^2-\lambda^2}\approx\sqrt{k_2^2-k_0^2}=\gamma_{20} \tag{5-32}$$

在割缝 Γ_1 的两侧，虽然 γ_1 的幅角相差了 180°，但是由于被积函数是关于 γ_1 的偶函数，因此在割缝两侧积分结果相等，即 k_1 是被积函数的可消去支点，被积函数沿割

缝 Γ_1 的积分等于零。同样的分析可知，k_2 是被积函数的可消去支点，被积函数沿着割缝 Γ_2 的积分结果为零。于是，式(5-27)中的积分可以简化为沿割缝 Γ_0 的积分，利用近似式(5-31)和式(5-32)可以得到

$$-\frac{\mu_0 k_0^2}{4\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{\gamma_1\gamma_2 k_1^2\tan\gamma_2 l_2}{q(\lambda)\gamma_0}\cdot e^{i\gamma_0(z+d)}H_1^{(1)}(\lambda\rho)\lambda^2 d\lambda$$

$$=-\frac{\mu_0 k_0^2}{4\pi}\frac{\gamma_{10}\gamma_{20}\sqrt{\frac{2k_0}{\pi\rho}}\tan(\gamma_{20}l_2)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{10}l_1)\tan(\gamma_{20}l_2)}\cdot\exp\left[i\left(k_0\rho+\frac{\pi}{4}\right)+i\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)^2\right]$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-k_0\rho\left(\tau+\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}\right)^2\right]}{\tau-\Delta}d\tau \tag{5-33}$$

其中

$$\Delta=-e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{k_0}{k_1^2}\frac{\gamma_{10}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\gamma_{10}k_2^2\tan(\gamma_{10}l_1)+\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{20}l_2)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{10}l_1)\tan(\gamma_{20}l_2)} \tag{5-34}$$

采用变量代换 $t=\tau+\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}$，式(5-33)中的积分就可以用误差函数来表示，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-k_0 t^2}}{t-e^{i\frac{\pi}{4}}\Delta'}dt=i\pi e^{-i\Delta'^2 k_0\rho}\mathrm{erfc}(\sqrt{-i\Delta'^2 k_0\rho}) \tag{5-35}$$

其中

$$\Delta'=\frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}+i\frac{k_0}{k_1^2}\frac{\gamma_{10}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\gamma_{10}k_2^2\tan(\gamma_{10}l_1)+\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{20}l_2)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{10}l_1)\tan(\gamma_{20}l_2)} \tag{5-36}$$

式(5-36)必须满足相位条件

$$|\mathrm{Arg}\sqrt{-i\Delta'^2 k_0\rho}|\leqslant\frac{\pi}{4} \tag{5-37}$$

误差函数和菲涅耳积分定义如下：

$$\mathrm{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt \tag{5-38}$$

$$F(p^*)=\frac{1}{2}(1+i)-\int_0^{p^*}\frac{e^{it}}{\sqrt{2\pi t}}dt \tag{5-39}$$

其中

$$p^*=\frac{k_0\rho}{2}\left[\frac{z+d}{\rho}+i\frac{k_0}{k_1^2}\gamma_{10}\cdot\frac{\gamma_{10}k_2^2\tan(\gamma_{10}l_1)+\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{20}l_2)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{10}l_1)\tan(\gamma_{20}l_2)}\right]^2 \tag{5-40}$$

考虑到误差函数和菲涅耳积分之间的关系

$$\mathrm{erfc}(\sqrt{-ip^*})=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}F(p^*) \tag{5-41}$$

可得

$$B_{0\varphi}^{(3,1)}=\mu_0 k_0^2 k_1^2\sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}e^{i\frac{3\pi}{4}}\sum_j\left[\frac{\tan\gamma_2(\lambda_j^*)l_2}{q'(\lambda_j^*)\gamma_0(\lambda_j^*)}\cdot\gamma_1(\lambda_j^*)\gamma_2(\lambda_j^*)(\lambda_j^*)^{\frac{3}{2}}e^{i\gamma_0(\lambda_j^*)(z+d)+i\lambda_j^*\rho}\right]$$

$$-\frac{\mathrm{i}\mu_0 k_0^3}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^*}F(p^*)\cdot\frac{\gamma_{10}\gamma_{20}\tan(\gamma_{20}l_2)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{10}l_1)\tan(\gamma_{20}l_2)} \tag{5-42}$$

其中

$$r_2=\sqrt{\rho^2+(z+d)^2}\approx\rho\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)^2\right] \tag{5-43}$$

同样地采用类似的步骤，也可以得到

$$B_{0\varphi}^{(3,2)}=k_0^2k_2^2\mu_0\sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\sum_j\left[\frac{\tan\gamma_1(\lambda_j^*)l_1}{q'(\lambda_j^*)\gamma_0(\lambda_j^*)}\cdot\gamma_1^2(\lambda_j^*)(\lambda_j^*)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j^*)(z+d)+\mathrm{i}\lambda_j^*\rho}\right]$$
$$-\frac{\mathrm{i}\mu_0 k_0^3}{2}\frac{k_2^2}{k_1^2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^*}F(p^*)\cdot\frac{\gamma_{10}^2\tan(\gamma_{10}l_1)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{10}l_1)\tan(\gamma_{20}l_2)} \tag{5-44}$$

由于直射波和理想反射波的解析表达式很多年前已经求出，于是我们可得磁场分量 $B_{0\varphi}$ 的解析表达式为

$$B_{0\varphi}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}\right)-\frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\cdot\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\right)$$
$$+\mu_0 k_0^2\sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\sum_j\frac{(\lambda_j^*)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j^*)(z+d)+\mathrm{i}\lambda_j^*\rho}}{q'(\lambda_j^*)\gamma_0(\lambda_j^*)}$$
$$\cdot\left[k_2^2\gamma_1^2(\lambda_j^*)\cdot\tan\gamma_1(\lambda_j^*)l_1+k_1^2\gamma_1(\lambda_j^*)\gamma_2(\lambda_j^*)\tan\gamma_2(\lambda_j^*)l_2\right]$$
$$-\frac{\mathrm{i}\mu_0 k_0^3}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^*}F(p^*)\cdot\frac{\gamma_{10}\gamma_{20}\tan(\gamma_{20}l_2)+\frac{k_2^2}{k_1^2}\gamma_{10}^2\tan(\gamma_{10}l_1)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{10}l_1)\tan(\gamma_{20}l_2)} \tag{5-45}$$

式中：$r_1=\sqrt{\rho^2+(z-d)^2}$；$r_2=\sqrt{\rho^2+(z+d)^2}$。

采用相同的方法，也可以得到电场分量 $E_{0\rho}$ 和 E_{0z} 的最终表达式，即

$$E_{0\rho}=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{3}{r_1^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0r_1^3}\right)-\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{z+d}{r_2}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0r_2^3}\right)-\omega\mu_0\sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot\sum_j\frac{(\lambda_j^*)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(\lambda_j^*)(z+d)+\mathrm{i}\lambda_j^*\rho}}{q'(\lambda_j^*)}$$
$$\cdot\left[k_1^2\gamma_1(\lambda_j^*)\gamma_2(\lambda_j^*)\tan\gamma_2(\lambda_j^*)l_2+k_2^2\gamma_1^2(\lambda_j^*)\cdot\tan\gamma_1(\lambda_j^*)l_1\right]$$
$$+\frac{\omega\mu_0 k_0^2}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\cdot\frac{\gamma_{10}\gamma_{20}\tan(\gamma_{20}l_2)+\frac{k_2^2}{k_1^2}\gamma_{10}^2\tan(\gamma_{10}l_1)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{10}l_1)\tan(\gamma_{20}l_2)}$$
$$\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\pi\frac{k_0\gamma_{10}}{k_1^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^*}F(p^*)\cdot\frac{\gamma_{10}k_2^2\tan(\gamma_{10}l_1)+\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{20}l_2)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{10}l_1)\tan(\gamma_{20}l_2)}\right] \tag{5-46}$$

$$E_{0z}=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\left[\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}-\frac{\mathrm{i}}{k_0r_1^3}-\left(\frac{z-d}{r_1}\right)^2\cdot\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{3}{r_1^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0r_1^3}\right)\right]+\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}$$
$$\cdot\left[\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}-\frac{\mathrm{i}}{k_0r_2^3}-\left(\frac{z+d}{r_2}\right)^2\cdot\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{3}{r_2^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_0r_2^3}\right)\right]+\omega\mu_0\sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

$$\cdot \sum_j \frac{(\lambda_j^*)^{\frac{5}{2}} e^{i\gamma_0(z+d)+i\lambda_j^*\rho}}{q'(\lambda_j^*)\gamma_0(\lambda_j^*)}[k_1^2\gamma_1(\lambda_j^*)\gamma_2(\lambda_j^*)\tan\gamma_2(\lambda_j^*)l_2$$

$$+k_2^2\gamma_1^2(\lambda_j^*)\tan\gamma_1(\lambda_j^*)l_1] + \frac{i\omega\mu_0 k_0^2}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}} e^{ik_0 r_2} e^{-ip^*} F(p^*)$$

$$\cdot \frac{\gamma_{10}\gamma_{20}\tan(\gamma_{20}l_2)+\frac{k_2^2}{k_1^2}\gamma_{10}^2\tan(\gamma_{10}l_1)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan(\gamma_{10}l_1)\tan(\gamma_{20}l_2)} \tag{5-47}$$

式(5-45)至式(5-47)即为垂直电偶极子在四层介质中激励的电磁场分量的完整解析表达式。如果区域 1 和区域 0 的介质完全相同，即 $k_1=k_2$，或者区域 1 和区域 2 的介质完全相同，即 $k_2=k_1$，以上的结果就可退化成三层介质情况。

5.3 计算结果和讨论

与三层介质的情况相似，如果源点和场点都位于空气层中，那么四层介质中垂直电偶极子激励的电磁场也包括四个部分，即直射波、理想反射波、吸附表面波和侧面波。从式(5-45)至式(5-47)中电磁场分量 $B_{0\varphi}$、$E_{0\rho}$和 E_{0z}的表达式可以看出：吸附表面波由极点 λ_j^* 的留数所决定。在区间 $k_0\leqslant\lambda_j^*\leqslant k_2$ 内，$\gamma_{j0}^*=\mathrm{i}\sqrt{\lambda_j^{*2}-k_0^2}$始终是个正虚数，包含 $e^{i\gamma_{0j}^* z}$的项沿 z 方向将以 $e^{-\sqrt{\lambda_j^{*2}-k_0^2}z}$指数衰减。当源点和场点都在空气和上层介质的边界上或附近时，吸附表面波的幅度在 $\hat{\rho}$ 方向以 $\rho^{-1/2}$衰减，其波数 λ_j^* 位于 k_0 和 k_2 之间，可以通过牛顿迭代法确定，而侧面波则是由沿支点割缝的积分所决定的。

图 5-5 和图 5-6 所示分别为 $k_0l_1=k_0l_2=0.4$ 和 $k_0l_1=k_0l_2=1.4$ 两种情况下的电场分量 E_{0z}的总场、吸附表面波和 DRL 波（包括直射波、理想反射波和侧面波三部分）的计算结果。计算所采用的参数如下：$f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.65$，$\varepsilon_{r2}=4.0$，$z=d=0$。类似的，图 5-7 和图 5-8 所示分别为 $k_0l_1=k_0l_2=0.4$ 和 $k_0l_1=k_0l_2=1.4$ 两种情况下的电场分量 E_{0z}的总场、吸附表面波和 DRL 波的计算结果。计算所采用的参数除了选取不同的 z 和 d 值($z=d=3\text{m}$)外，其他参数完全相同。从图 5-5 和图 5-6 的计算结果可以看出：在源点和场点都位于空气层和上层介质的边界上或者附近时，远区场主要由吸附表面波决定。从图 5-7 和图 5-8 的计算结果可以看出：当源点和场点远离空气层和上面一层介质的边界时，吸附表面波可以被忽略。这种特性和三层介质的情况相类似。

在不同的介质层厚度下，垂直电偶极子在四层介质中激励的场分量有很大不同，但可以通过调整中间两层介质层的厚度，来达到我们所期望的激励效果。

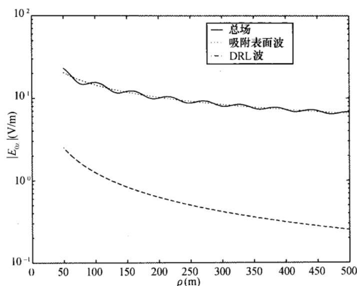


图 5-5　电场分量 $|E_{0z}|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线

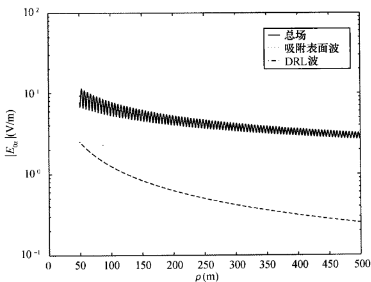


图 5-6　电场分量 $|E_{0z}|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线

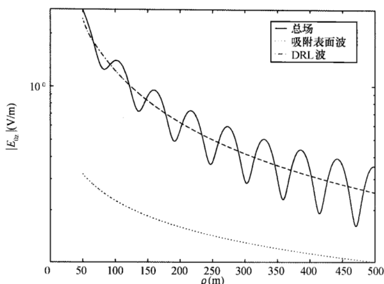


图 5-7 电场分量 $|E_{0z}|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线

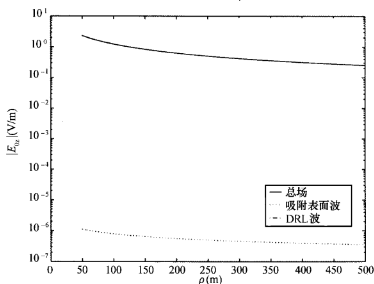


图 5-8 电场分量 $|E_{0z}|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线

第 6 章

水平电偶极子在四层介质中激励的电磁场

第 4 章介绍了水平电偶极子在三层介质中激励的电磁场的完整解析表达式。显然，对四层介质而言，也应当有相似的特性。本章将导出水平电偶极子在四层介质中激励的电磁场的完整解析表达式，并给出相应的计算结果[99]。

6.1 电磁波场分量的积分表达式

本章所研究问题的物理模型如图 6-1 所示。利用第 4 章所述的"水平电偶极子在三层介质中激励的电磁场的积分表达式"相似的推导步骤，可以得到水平电偶极子在四层介质中激励的电磁场的积分表达式。这里，我们由 King 等人的专著[30]中式(11.5.4)至式(11.5.9)可以直接导出水平电偶极子在四层介质中激励的电磁场的积分表达式。

$$E_{0\rho}(\rho,\varphi,z)=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\cos\varphi\left\{\int_0^\infty\left(k_0^2J_0(\lambda\rho)-\frac{\lambda^2}{2}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right)\gamma_0^{-1}e^{i\gamma_0|z-d|}\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\int_0^\infty\left(\frac{\gamma_0Q}{2}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]-\frac{k_0^2P}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right)e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda d\lambda\right\} \tag{6-1}$$

$$E_{0\varphi}(\rho,\varphi,z)=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\sin\varphi\left\{\int_0^\infty\left(k_0^2J_0(\lambda\rho)-\frac{\lambda^2}{2}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right)\gamma_0^{-1}e^{i\gamma_0|z-d|}\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\int_0^\infty\left(\frac{\gamma_0Q}{2}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]-\frac{k_0^2P}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right)e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda d\lambda\right\}. \tag{6-2}$$

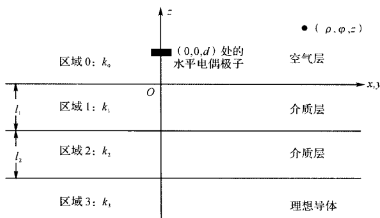


图 6-1 水平电偶极子在四层介质中激励的电磁场

$$E_{0z}(\rho,\varphi,z)=\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\cos\varphi\int_0^\infty(\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}+Q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)})J_1(\lambda\rho)\lambda^2 d\lambda\,,\quad \begin{matrix}d<z\\0\leqslant z\leqslant d\end{matrix} \tag{6-3}$$

$$\begin{aligned}B_{0\rho}(\rho,\varphi,z)=&-\frac{\mu_0}{4\pi}\sin\varphi\left\{\pm\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\lambda\mathrm{d}\lambda+\int_0^\infty\left(\frac{Q}{2}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{P}{2}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda\right\},\quad \begin{matrix}d<z\\0\leqslant z\leqslant d\end{matrix}\end{aligned} \tag{6-4}$$

$$\begin{aligned}B_{0\varphi}(\rho,\varphi,z)=&-\frac{\mu_0}{4\pi}\cos\varphi\left\{\pm\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\lambda\mathrm{d}\lambda+\int_0^\infty\left(\frac{Q}{2}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{P}{2}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda\right\},\quad \begin{matrix}d<z\\0\leqslant z\leqslant d\end{matrix}\end{aligned} \tag{6-5}$$

$$B_{0z}(\rho,\varphi,z)=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi}\sin\varphi\int_0^\infty[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}-P\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}]\gamma_0^{-1}J_1(\lambda\rho)\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{6-6}$$

这里,我们假定基底为理想导体的情况,即

$$k_3\rightarrow\infty \tag{6-7}$$

于是

$$Q=-\frac{k_1^2\gamma_0+\mathrm{i}k_0^2\gamma_1\dfrac{\gamma_1k_2^2\tan\gamma_1l_1+\gamma_2k_1^2\tan\gamma_2l_2}{\gamma_1k_2^2-\gamma_2k_1^2\tan\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2}}{k_1^2\gamma_0-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1\dfrac{\gamma_1k_2^2\tan\gamma_1l_1+\gamma_2k_1^2\tan\gamma_2l_2}{\gamma_1k_2^2-\gamma_2k_1^2\tan\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2}} \tag{6-8}$$

$$P=-\frac{\gamma_0-\mathrm{i}\gamma_1\dfrac{\gamma_2-\gamma_1\tan\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2}{\gamma_1\tan\gamma_2l_2+\gamma_2\tan\gamma_1l_1}}{\gamma_0+\mathrm{i}\gamma_1\dfrac{\gamma_2-\gamma_1\tan\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2}{\gamma_1\tan\gamma_2l_2+\gamma_2\tan\gamma_1l_1}} \tag{6-9}$$

$$\gamma_j=\sqrt{k_j^2-\lambda^2}\,,\quad j=0,1,2 \tag{6-10}$$

$$k_j=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_j}\,,\quad j=0,1,2 \tag{6-11}$$

为了分析方便起见，我们将式(6-1)至式(6-6)重新写成如下形式：

$$E_{0\rho}(\rho,\varphi,z)=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\cos\varphi[F_{\rho0}(\rho,z-d)-F_{\rho0}(\rho,z+d)+F_{\rho1}(\rho,z+d)] \tag{6-12}$$

$$E_{0\varphi}(\rho,\varphi,z)=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\sin\varphi[F_{\varphi0}(\rho,z-d)-F_{\varphi0}(\rho,z-d)+F_{\varphi1}(\rho,z+d)] \tag{6-13}$$

$$E_{0z}(\rho,\varphi,z)=\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\cos\varphi[F_{z0}(\rho,z-d)-F_{z0}(\rho,z+d)+F_{z1}(\rho,z+d)] \tag{6-14}$$

$$B_{0\rho}(\rho,\varphi,z)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\sin\varphi[G_{\rho0}(\rho,z-d)-G_{\rho0}(\rho,z+d)+G_{\rho1}(\rho,z+d)] \tag{6-15}$$

$$B_{0\varphi}(\rho,\varphi,z)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\cos\varphi[G_{\varphi0}(\rho,z-d)-G_{\varphi0}(\rho,z+d)+G_{\varphi1}(\rho,z+d)] \tag{6-16}$$

$$B_{0z}(\rho,\varphi,z)=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi}\sin\varphi[G_{z0}(\rho,z-d)-G_{z0}(\rho,z+d)+G_{z1}(\rho,z+d)] \tag{6-17}$$

其中

$$F_{\rho0}(\rho,z-d)=\int_0^\infty\left\{\frac{\gamma_0}{2}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]+\frac{k_0^2}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{6-18}$$

$$F_{\rho0}(\rho,z+d)=\int_0^\infty\left\{\frac{\gamma_0}{2}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]+\frac{k_0^2}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{6-19}$$

$$F_{\varphi0}(\rho,z-d)=\int_0^\infty\left\{\frac{\gamma_0}{2}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]+\frac{k_0^2}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{6-20}$$

$$F_{\varphi0}(\rho,z+d)=\int_0^\infty\left\{\frac{\gamma_0}{2}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]+\frac{k_0^2}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{6-21}$$

$$F_{z0}(\rho,z-d)=\pm\int_0^\infty J_1(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\lambda^2\mathrm{d}\lambda,\quad \begin{matrix} d<z \\ 0\leqslant z\leqslant d\end{matrix} \tag{6-22}$$

$$F_{z0}(\rho,z+d)=\int_0^\infty J_1(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{6-23}$$

$$G_{\rho0}(\rho,z-d)=\pm\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\lambda\mathrm{d}\lambda,\quad \begin{matrix} d<z \\ 0\leqslant z\leqslant d\end{matrix} \tag{6-24}$$

$$G_{\rho0}(\rho,z+d)=\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{6-25}$$

$$G_{\varphi0}(\rho,z-d)=\pm\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0|z-d|}\lambda\mathrm{d}\lambda=G_{\rho0}(\rho,z-d),\quad \begin{matrix} d<z \\ 0\leqslant z\leqslant d\end{matrix} \tag{6-26}$$

$$G_{\varphi0}(\rho,z+d)=\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda=G_{\rho0}(\rho,z+d) \tag{6-27}$$

$$G_{z0}(\rho,z-d)=\int_0^{\infty}J_1(\lambda\rho)\gamma_0^{-1}e^{i\gamma_0|z-d|}\lambda^2 d\lambda \tag{6-28}$$

$$G_{z0}(\rho,z+d)=\int_0^{\infty}J_1(\lambda\rho)\gamma_0^{-1}e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda^2 d\lambda \tag{6-29}$$

式(6-12)至式(6-17)中的第一项和第二项分别表示直射波和理想反射波。前两项，即式(6-18)至式(6-29)中这些积分的解析表达式与两层和三层介质的情况相同，这在很多年前就已经求出[30]。下面主要的任务是求解式(6-12)至式(6-17)中的第三项。和三层介质的情况相似，式(6-12)、式(6-13)、式(6-15)和式(6-16)中的第三项能够分解成电型波和磁型波，即

$$F_{\rho1}(\rho,z+d)=F_{\rho2}(\rho,z+d)+F_{\rho3}(\rho,z+d) \tag{6-30}$$

$$F_{\varphi1}(\rho,z+d)=F_{\varphi2}(\rho,z+d)+F_{\varphi3}(\rho,z+d) \tag{6-31}$$

$$G_{\rho1}(\rho,z+d)=G_{\rho2}(\rho,z+d)+G_{\rho3}(\rho,z+d) \tag{6-32}$$

$$G_{\varphi1}(\rho,z+d)=G_{\varphi2}(\rho,z+d)+G_{\varphi3}(\rho,z+d) \tag{6-33}$$

其中包含 Q 的积分项代表电型波，即

$$F_{\rho2}(\rho,z+d)=\int_0^{\infty}\frac{\gamma_0(Q+1)}{2}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda d\lambda \tag{6-34}$$

$$F_{\varphi2}(\rho,z+d)=\int_0^{\infty}\frac{\gamma_0(Q+1)}{2}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda d\lambda \tag{6-35}$$

$$G_{\rho2}(\rho,z+d)=\int_0^{\infty}\frac{Q+1}{2}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda d\lambda \tag{6-36}$$

$$G_{\varphi2}(\rho,z+d)=\int_0^{\infty}\frac{Q+1}{2}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda d\lambda \tag{6-37}$$

包含 P 的积分项代表磁型波，即

$$F_{\rho3}(\rho,z+d)=-\int_0^{\infty}\frac{k_0^2(P-1)}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda d\lambda \tag{6-38}$$

$$F_{\varphi3}(\rho,z+d)=-\int_0^{\infty}\frac{k_0^2(P-1)}{2\gamma_0}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda d\lambda \tag{6-39}$$

$$G_{\rho3}(\rho,z+d)=-\int_0^{\infty}\frac{P-1}{2}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda d\lambda \tag{6-40}$$

$$G_{\varphi3}(\rho,z+d)=-\int_0^{\infty}\frac{P-1}{2}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]e^{i\gamma_0(\rho,z+d)}\lambda d\lambda \tag{6-41}$$

而式(6-14)和式(6-17)中的第三项分别只包含电型波和磁型波，即

$$F_{z1}(\rho,z+d)=\int_0^{\infty}(Q+1)J_1(\lambda\rho)e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda^2 d\lambda \tag{6-42}$$

$$G_{z1}(\rho,z+d)=-\int_0^{\infty}(P-1)J_1(\lambda\rho)\gamma_0^{-1}e^{i\gamma_0(z+d)}\lambda^2 d\lambda \tag{6-43}$$

下面，我们求解水平电偶极子在四层介质中激励的电磁场。

6.2 电磁波场分量的解析表达式

6.2.1 电型波分量

首先分析含有因子 Q 的各积分项，即电型波分量的积分项式(4-34)至式(4-37)。由于 γ_0、γ_1 和 γ_2 是关于 λ 的偶函数，以及贝塞尔函数和汉克尔函数之间的关系式为

$$J_n(\lambda\rho)=\frac{1}{2}[H_n^{(1)}(\lambda\rho)+H_n^{(2)}(\lambda\rho)] \tag{6-44}$$

$$H_n^{(1)}(-\lambda\rho)=H_n^{(2)}(\lambda\rho)(-1)^{n+1} \tag{6-45}$$

$$J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)=\frac{2}{\lambda\rho}J_1(\lambda\rho) \tag{6-46}$$

所以由式(6-34)可得

$$F_{\rho 2}(\rho,z+d)=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_0^2\gamma_0\gamma_1(\gamma_1k_2^2\tan\gamma_1l_1+\gamma_2k_1^2\tan\gamma_2l_2)[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)]}{q(\lambda)}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{6-47}$$

其中

$$q(\lambda)=k_1^2\gamma_0(\gamma_1k_2^2-\gamma_2k_1^2\tan\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2)-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1(\gamma_1k_2^2\tan\gamma_1l_1+\gamma_2k_1^2\tan\gamma_2l_2) \tag{6-48}$$

为了计算方便，我们将式(6-47)分解成两部分，即

$$F_{\rho 2}^{(1)}=-\frac{\mathrm{i}}{2}k_0^2k_1^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\tan\gamma_2l_2[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)]}{q(\lambda)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{6-49}$$

$$F_{\rho 2}^{(2)}=-\frac{\mathrm{i}}{2}k_0^2k_2^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_0\gamma_1^2\tan\gamma_1l_1[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)]}{q(\lambda)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{6-50}$$

为了求解式(6-49)和式(6-50)中的积分，需要确定极点和支点的位置。式(6-49)和式(6-50)中的被积函数支点分别位于 $\lambda=k_0$，$\lambda=k_1$ 和 $\lambda=k_2$。为了将根式函数 γ_0、γ_1 和 γ_2 分解成单值分支，在 λ 的复平面上分别以 $\lambda=k_0$，$\lambda=k_1$ 和 $\lambda=k_2$ 为端点取平行于虚轴的三个割缝。被积函数的极点和支点的示意图和第5章的图5-2相同。三条割缝的一端为无穷远。在以 k_0 为端点的割缝 Γ_0 两侧，γ_0 的幅角彼此相差180°，γ_1 和 γ_2 的幅角保持不变。而在以 k_1 为端点的割缝 Γ_1 两侧，γ_1 的幅角彼此相差180°，γ_0 和 γ_2 则保持不变。同样地，在 k_2 为端点的割缝 Γ_2 两侧，γ_2 的幅角相差180°，γ_0 和 γ_1 保持不变。首先考虑如下的极点方程：

$$q(\lambda)=k_1^2\gamma_0(\gamma_1k_2^2-\gamma_2k_1^2\tan\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2)-\mathrm{i}k_0^2\gamma_1(\gamma_1k_2^2\tan\gamma_1l_1+\gamma_2k_1^2\tan\gamma_2l_2)=0 \tag{6-51}$$

极点方程式(6-51)与第 5 章中的极点方程式(5-26)完全相同,可知由极点决定的电型吸附表面波的特性与第 5 章的情况完全相同,本章将不再赘述。由此,我们可以将式(6-49)中的积分改写成

$$F_{\rho 2}^{(1)}=2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}k_0^2k_1^2\right)\sum_j \frac{\gamma_{0E}^*\gamma_{1E}^*\gamma_{2E}^*\tan\gamma_{2E}^*l_2\left[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)\right]}{q'(\lambda_{jE}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^*(z+d)}\lambda_{jE}^*$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{2}k_0^2k_1^2\int_{\Gamma_0+\Gamma_1+\Gamma_2}\frac{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\tan\gamma_2 l_2\left[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)\right]}{q(\lambda)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda \quad (6\text{-}52)$$

式中:λ_{jE}^*表示电型波极点方程的根。

$$q'(\lambda)=-k_1^2\frac{\lambda}{\gamma_0}(\gamma_1k_2^2-\gamma_2k_1^2\tan\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2)+\mathrm{i}k_0^2\frac{\lambda}{\gamma_1}(\gamma_1k_2^2\tan\gamma_1l_1+\gamma_2k_1^2\tan\gamma_2l_2)$$
$$+k_1^2\gamma_0\left[-\frac{\lambda}{\gamma_1}k_2^2+\frac{\lambda}{\gamma_2}k_1^2\tan\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2+k_1^2\gamma_2\lambda\left(\frac{l_1}{\gamma_1}\sec^2\gamma_1l_1\tan\gamma_2l_2+\frac{l_2}{\gamma_2}\tan\gamma_1l_1\sec^2\gamma_2l_2\right)\right]$$
$$+\mathrm{i}k_0^2\gamma_1\lambda\left(\frac{k_2^2\tan\gamma_1l_1}{\gamma_1}+\frac{k_1^2\tan\gamma_2l_2}{\gamma_2}+k_2^2l_1\sec^2\gamma_1l_1+k_1^2l_2\sec^2\gamma_2l_2\right) \quad (6\text{-}53)$$

$$\gamma_{nE}^*=\gamma_n^*(\lambda_{jE}^*),\quad n=0,1,2 \quad (6\text{-}54)$$

在割缝 Γ_0 两侧,取 $\lambda=k_0(1+\mathrm{i}\tau^2)$,此时

$$H_n^{(1)}(\lambda\rho)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k_0\rho-\frac{1}{4}\pi-n\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\mathrm{e}^{-k_0\rho\tau^2},\quad n=0,1,2 \quad (6\text{-}55)$$

在远区条件 $k_0\rho\gg1$ 和$(z+d)\ll\rho$ 成立的情况下,沿割缝 Γ_0 的积分主要来自于 k_0 附近的贡献。在支点 k_0 附近,γ_0 的近似式可表示为

$$\gamma_0=\sqrt{k_0^2-\lambda^2}\approx k_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}\sqrt{2}\tau \quad (6\text{-}56)$$

在割缝 Γ_0 的左侧,γ_0 的幅角变为$-\pi/4$,τ 从$-\infty$变至 0,当 λ 绕支点逆时针转过 90°到达实轴时,γ_0 的幅角变为 $\pi/2$;在割缝 Γ_0 的右侧,τ 从 0 变至$+\infty$,γ_0 的幅角为 $3\pi/4$,因此在此路径上靠近 k_0 时,γ_1 和 γ_2 可以作如下近似:

$$\gamma_1=\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\approx\sqrt{k_1^2-k_0^2}=\gamma_{10} \quad (6\text{-}57)$$

$$\gamma_2=\sqrt{k_2^2-\lambda^2}\approx\sqrt{k_2^2-k_0^2}=\gamma_{20} \quad (6\text{-}58)$$

在割缝 Γ_1 的两侧,虽然 γ_1 的幅角相差了 180°,但是由于被积函数是关于 γ_1 的偶函数,因此在割缝两侧积分结果相等,即 k_1 是被积函数的可消去支点,被积函数沿割缝 Γ_1 的积分等于零。同样的分析可知,k_2 是被积函数的可消去支点,被积函数沿着割缝 Γ_2 的积分结果为零。于是,式(6-51)中的积分可以简化为沿割缝 Γ_0 的积分,利用上面的近似式以及变量代换 $t=\tau+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}$,可得

$$I_1=\frac{2\sqrt{2}k_0^4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\gamma_{10}\gamma_{20}\tan\gamma_{20}l_2\exp\left[\mathrm{i}k_0\rho+\mathrm{i}\frac{k_0\rho}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)^2\right]}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan\gamma_{10}l_1\tan\gamma_{20}l_2}$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-k_0\rho\left(t-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}\right)^2}}{t-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\Delta_1'}\mathrm{d}t \quad (6\text{-}59)$$

其中

$$\Delta_1' = \frac{z+d}{\sqrt{2}\rho} - \mathrm{i}\frac{k_0\gamma_{10}(\gamma_{10}k_2^2\tan\gamma_{10}l_1 + \gamma_{20}k_1^2\tan\gamma_{20}l_2)}{\sqrt{2}k_1^2(\gamma_{10}k_2^2 - \gamma_{20}k_1^2\tan\gamma_{10}l_1\tan\gamma_{20}l_2)} \tag{6-60}$$

于是，式(6-59)中的积分可以用误差函数表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-k_0\rho t^2}\left(t-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}\right)^2}{t-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\Delta_1'}\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\left(\Delta_1' - \sqrt{2}\frac{z+d}{\rho}\right) - \pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1^*}\left(\Delta_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}\right)^{2'}\mathrm{erfc}(\sqrt{-\mathrm{i}p_1^*}) \tag{6-61}$$

其中，$p_1^* = k_0\rho\Delta_1'^2$，并且该公式的使用需要满足下面的相位条件：

$$|\mathrm{Arg}\ \sqrt{-\mathrm{i}\Delta_1'^2 k_0\rho}| \leqslant \frac{\pi}{4} \tag{6-62}$$

误差函数和菲涅耳积分定义如下：

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{6-63}$$

$$F(p^*) = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}) - \int_0^{p^*}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}t \tag{6-64}$$

由于误差函数和菲涅耳积分之间的关系为

$$\mathrm{erfc}(\sqrt{-\mathrm{i}p^*}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}F(p^*) \tag{6-65}$$

所示由以上的推导，可得 $F_{\rho 2}^{(1)}$ 的解析表达式为

$$\begin{aligned}F_{\rho 2}^{(1)} = {} & \pi k_0^2 k_1^2\sum_j \frac{\gamma_{0E}^*\gamma_{1E}^*\gamma_{2E}^*\tan\gamma_{2E}^* l_2[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho) - H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)]}{q'(\lambda_{jE}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^*(z+d)}\lambda_{jE}^* \\ & + \frac{2\sqrt{2}k_0^4\gamma_{10}\gamma_{20}\tan\gamma_{20}l_2}{\gamma_{10}k_2^2 - \gamma_{20}k_1^2\tan\gamma_{10}l_1\tan\gamma_{20}l_2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\left(\Delta_1' - \sqrt{2}\frac{z+d}{\rho}\right)\right. \\ & \left. + \mathrm{i}\sqrt{2}\pi\left(\Delta_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}\right)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1^*}F(p_1^*)\right]\end{aligned} \tag{6-66}$$

其中

$$r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z+d)^2} \approx \rho\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)^2\right] \tag{6-67}$$

同样地采取类似的步骤，可得 $F_{\rho 2}^{(2)}$ 的解析表达式为

$$\begin{aligned}F_{\rho 2}^{(2)} = {} & \pi k_0^2 k_2^2\sum_j \frac{\gamma_{0E}^*\gamma_1^2(\lambda_{jE}^*)\tan\gamma_{1E}^* l_1[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho) - H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)]}{q'(\lambda_{jE}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0E}^*(z+d)}\lambda_{jE}^* \\ & + \frac{2\sqrt{2}k_0^4\frac{k_2^2}{k_1^2}\gamma_{10}^2\tan\gamma_{10}l_1}{\gamma_{10}k_2^2 - \gamma_{20}k_1^2\tan\gamma_{10}l_1\tan\gamma_{20}l_2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\left(\Delta_1' - \sqrt{2}\frac{z+d}{\rho}\right)\right. \\ & \left. + \mathrm{i}\sqrt{2}\pi\left(\Delta_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}\right)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1^*}F(p_1^*)\right]\end{aligned} \tag{6-68}$$

于是，$F_{\rho 2}(\rho,z+d)$的解析表达式可表示为

$$F_{\rho 2}(\rho,z+d)=\pi k_0^2\cdot\sum_j\frac{\gamma_{0E}^*\gamma_{1E}^*(k_2^2\gamma_{1E}^*\tan\gamma_{1E}^*l_1+k_1^2\gamma_{2E}^*\tan\gamma_{2E}^*l_2)[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)]}{q'(\lambda_{jE}^*)}$$

$$\cdot e^{i\gamma_{0E}^*(z+d)}\lambda_{jE}^*+\frac{2\sqrt{2}k_0^4\gamma_{10}\left(\dfrac{k_2^2}{k_1^2}\gamma_{10}\tan\gamma_{10}l_1+\gamma_{20}\tan\gamma_{20}l_2\right)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan\gamma_{10}l_1\tan\gamma_{20}l_2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}e^{ik_0r_2}$$

$$\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\left(\Delta_1'-\sqrt{2}\frac{z+d}{\rho}\right)+i\sqrt{2}\pi\left(\Delta_1'-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}\right)^2e^{-ip_1^*}F(p_1^*)\right]\tag{6-69}$$

采用类似的方法，可得电型波其余几个积分式的解析表达式

$$F_{\varphi 2}(\rho,z+d)=\pi k_0^2\cdot\sum_j\frac{\gamma_{0E}^*\gamma_{1E}^*(k_2^2\gamma_{1E}^*\tan\gamma_{1E}^*l_1+k_1^2\gamma_{2E}^*\tan\gamma_{2E}^*l_2)[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)+H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)]}{q'(\lambda_{jE}^*)}$$

$$\cdot e^{i\gamma_{0E}^*(z+d)}\lambda_{jE}^*-\frac{i2\sqrt{2}k_0^3\gamma_{10}\left(\dfrac{k_2^2}{k_1^2}\gamma_{10}\tan\gamma_{10}l_1+\gamma_{20}\tan\gamma_{20}l_2\right)}{\rho(\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan\gamma_{10}l_1\tan\gamma_{20}l_2)}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}e^{ik_0r_2}$$

$$\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\left(\Delta_1'-\sqrt{2}\frac{z+d}{\rho}\right)+i\sqrt{2}\pi\left(\Delta_1'-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}\right)^2e^{-ip_1^*}F(p_1^*)\right]\tag{6-70}$$

$$G_{\varphi 2}(\rho,z+d)=-\pi k_0^2\cdot\sum_j\frac{\gamma_{1E}^*(k_2^2\gamma_{1E}^*\tan\gamma_{1E}^*l_1+k_1^2\gamma_{2E}^*\tan\gamma_{2E}^*l_2)[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)]}{q'(\lambda_{jE}^*)}$$

$$\cdot e^{i\gamma_{0E}^*(z+d)}\lambda_{jE}^*-\frac{2k_0^3\gamma_{10}\left(\dfrac{k_2^2}{k_1^2}\gamma_{10}\tan\gamma_{10}l_1+\gamma_{20}\tan\gamma_{20}l_2\right)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan\gamma_{10}l_1\tan\gamma_{20}l_2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}e^{-k_0r_2}$$

$$\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+i\sqrt{2}\pi\left(\Delta_1'-\frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)e^{-ip_1^*}F(p_1^*)\right]\tag{6-71}$$

$$G_{\rho 2}(\rho,z+d)=-\pi k_0^2\cdot\sum_j\frac{\gamma_{1E}^*(k_2^2\gamma_{1E}^*\tan\gamma_{1E}^*l_1+k_1^2\gamma_{2E}^*\tan\gamma_{2E}^*l_2)[H_0^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)+H_2^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)]}{q'(\lambda_{jE}^*)}$$

$$\cdot e^{i\gamma_{0E}^*(z+d)}\lambda_{jE}^*+\frac{i2k_0^2\gamma_{10}\left(\dfrac{k_2^2}{k_1^2}\gamma_{10}\tan\gamma_{10}l_1+\gamma_{20}\tan\gamma_{20}l_2\right)}{\rho(\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan\gamma_{10}l_1\tan\gamma_{20}l_2)}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}e^{ik_0r_2}$$

$$\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+i\sqrt{2}\pi\left(\Delta_1'-\frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)e^{-ip_1^*}F(p_1^*)\right]\tag{6-72}$$

$$F_{z1}(\rho,z+d)=2\pi k_0^2\sum_j\frac{\gamma_{1E}^*(k_2^2\gamma_{1E}^*\tan\gamma_{1E}^*l_1+k_1^2\gamma_{2E}^*\tan\gamma_{2E}^*l_2)H_1^{(1)}(\lambda_{jE}^*\rho)}{q'(\lambda_{jE}^*)}e^{i\gamma_{0E}^*(z+d)}\lambda_{jE}^{*2}$$

$$+\frac{i2k_0^4\gamma_{10}\left(\dfrac{k_2^2}{k_1^2}\gamma_{10}\tan\gamma_{10}l_1+\gamma_{20}\tan\gamma_{20}l_2\right)}{\gamma_{10}k_2^2-\gamma_{20}k_1^2\tan\gamma_{10}l_1\tan\gamma_{20}l_2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}e^{ik_0r_2}$$

$$\cdot\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+i\sqrt{2}\pi\left(\Delta_1'-\frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)e^{-ip_1^*}F(p_1^*)\right]\tag{6-73}$$

6.2.2 磁型波分量

与分析电型波的方法类似，将式(6-44)至式(6-46)代人式(6-39)，可得

$$F_{\varphi 3}(\rho,z+d)=\frac{k_0^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma_1\tan\gamma_2 l_2+\gamma_2\tan\gamma_1 l_1)[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)]}{p(\lambda)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{6-74}$$

其中

$$p(\lambda)=\gamma_0\gamma_1\tan\gamma_2 l_2+\gamma_0\gamma_2\tan\gamma_1 l_1+\mathrm{i}\gamma_1\gamma_2-\mathrm{i}\gamma_1^2\tan\gamma_1 l_1\tan\gamma_2 l_2 \tag{6-75}$$

为了计算方便，同样将 $F_{\varphi 3}$ 分解成 $F_{\varphi 3}^{(1)}$ 和 $F_{\varphi 3}^{(2)}$，表达式为

$$F_{\varphi 3}^{(1)}=\frac{k_0^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_1\tan\gamma_2 l_2[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)]}{p(\lambda)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{6-76}$$

$$F_{\varphi 3}^{(2)}=\frac{k_0^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_2\tan\gamma_1 l_1[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)]}{p(\lambda)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{6-77}$$

首先，计算积分 $F_{\varphi 3}^{(1)}$。为了求解式(6-76)和式(6-77)中的积分，需要确定极点和支点的位置。其中，支点分别位于 $\lambda=k_0$，$\lambda=k_1$ 和 $\lambda=k_2$。接下来，我们来求解磁型波的极点方程，并计算沿着割缝 Γ_0、Γ_1 和 Γ_2 的积分。先考虑如下的极点方程：

$$p(\lambda)=\gamma_0\gamma_1\tan\gamma_2 l_2+\gamma_0\gamma_2\tan\gamma_1 l_1+\mathrm{i}\gamma_1\gamma_2-\mathrm{i}\gamma_1^2\tan\gamma_1 l_1\tan\gamma_2 l_2=0 \tag{6-78}$$

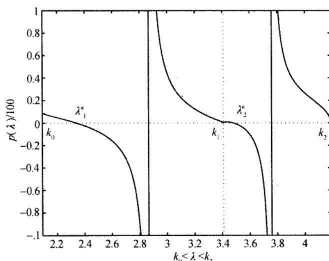


图 6-2 磁型波的极点方程(6-78)的根：$f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.6\text{s}$，$\varepsilon_{r2}=4.0$，$l_1=l_2=0.8\text{m}$

磁型波的极点方程也是相当复杂的。这里需要满足关系式 $k_0\leqslant k_1\leqslant k_2$ 及 $k_3\to\infty$。显然，当 $\lambda<k_0$ 或 $\lambda>k_2$ 时，极点方程 $p(\lambda)$ 的根是不存在的，而在区间 $k_0\leqslant\lambda\leqslant k_1$ 和 $k_1\leqslant\lambda\leqslant k_2$ 内，才有可能存在根。图 6-2 和图 6-3 所示为用牛顿迭代法求解出来的极点，这就验证了以上的分析，在区间 $k_0\leqslant\lambda\leqslant k_1$ 和 $k_1\leqslant\lambda\leqslant k_2$ 内，可以存在极点。需要指出的是，在应用留数定理时，k_1 存在围道之外，是可去极点。于是，我们可以将式

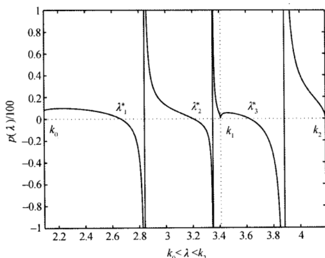


图 6-3　磁型波的极点方程(6-78)的根：$f=100\text{MHz}, \varepsilon_{r1}=2.65, \varepsilon_{r2}=4.0, l_1=3.0\text{m}, l_2=1.0\text{m}$

(6-76)中的积分式改写成如下的形式：

$$F_{\varphi 3}^{(1)} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{k_0^2}{2}\sum_j \frac{\gamma_{1B}^*\tan\gamma_{2B}^* l_2\left[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)-H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)\right]}{p'(\lambda_{jB}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(z+d)}\lambda_{jB}^*$$
$$+\frac{k_0^2}{2}\int_{\Gamma_0+\Gamma_1+\Gamma_2}\frac{\gamma_1\tan\gamma_2 l_2\left[H_0^{(1)}(\lambda\rho)-H_2^{(1)}(\lambda\rho)\right]}{p(\lambda)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_0(z+d)}\lambda\mathrm{d}\lambda \qquad (6\text{-}79)$$

其中，λ_{jB}^* 是极点方程 $p(\lambda)$ 的根。

$$p'(\lambda)=-\lambda\Big(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\tan\gamma_2 l_2+\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\tan\gamma_2 l_2+\frac{\gamma_0\gamma_1 l_2}{\gamma_2}\sec^2\gamma_2 l_2$$
$$+\frac{\gamma_2}{\gamma_0}\tan\gamma_1 l_1+\frac{\gamma_0}{\gamma_2}\tan\gamma_1 l_1+\frac{\gamma_0\gamma_2 l_1}{\gamma_1}\sec^2\gamma_1 l_1$$
$$+\mathrm{i}\frac{\gamma_2}{\gamma_1}+\mathrm{i}\frac{\gamma_1}{\gamma_2}-\mathrm{i}2\tan\gamma_1 l_1\tan\gamma_2 l_2-\mathrm{i}\gamma_1 l_1\sec^2\gamma_1 l_1\tan\gamma_2 l_2-\mathrm{i}\frac{\gamma_1^2 l_2}{\gamma_2}\tan\gamma_1 l_1\sec^2\gamma_2 l_2\Big) \qquad (6\text{-}80)$$

$$\gamma_{nB}^*=\gamma_n^*(\lambda_{jB}^*),\quad n=0,1,2 \qquad (6\text{-}81)$$

与电型波的情况相类似，可以令 $\lambda=k_0(1+\mathrm{i}\tau^2)$，并采用式(6-55)至式(6-58)中的近似表达式，式(6-79)中的积分可以写成如下形式：

$$I_2=-\frac{\mathrm{i}2k_0^3\sqrt{\dfrac{1}{\pi k_0\rho}}\gamma_{10}\tan\gamma_{20}l_2\exp\left[\mathrm{i}k_0\rho+\mathrm{i}\dfrac{k_0\rho}{2}\left(\dfrac{z+d}{\rho}\right)^2\right]}{\gamma_{10}\tan\gamma_{20}l_2+\gamma_{20}\tan\gamma_{10}l_1}$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-k_0 t^2}\left(t-\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\dfrac{z+d}{\rho}\right)}{t-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\Delta_2'}\mathrm{d}t \qquad (6\text{-}82)$$

其中

$$\Delta_2' = \frac{z+d}{\sqrt{2}\rho} + \mathrm{i}\frac{\gamma_{10}\gamma_{20} - \gamma_{10}^2 \tan\gamma_{10} l_1 \tan\gamma_{20} l_2}{\sqrt{2}k_0(\gamma_{10}\tan\gamma_{20} l_2 + \gamma_{20}\tan\gamma_{10} l_1)} \tag{6-83}$$

式(6-82)采用了变量代换 $t = \tau + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}$。式(6-82)中的积分可用菲涅耳函数表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-k_0\rho t^2}\left(t - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\frac{z+d}{\rho}\right)}{t - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\Delta_2'}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}} + \mathrm{i}\sqrt{2}\pi\left(\Delta_2' - \frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2^*}F(-\mathrm{i}p_2^*) \tag{6-84}$$

至此，我们得到

$$\begin{aligned} F_{\varphi3}^{(1)} = {} & \mathrm{i}\pi k_0^2 \sum_j \frac{\gamma_{1B}^*\tan\gamma_{2B}^* l_2[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho) - H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)]}{p'(\lambda_{jB}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(z+d)}\lambda_{jB}^* \\ & - \frac{\mathrm{i}2k_0^3\gamma_{10}\tan\gamma_{20}l_2}{\gamma_{10}\tan\gamma_{20}l_2 + \gamma_{20}\tan\gamma_{10}l_1}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\right. \\ & \left. + \mathrm{i}\sqrt{2}\pi\left(\Delta_2' - \frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2^*}F(-\mathrm{i}p_2^*)\right] \end{aligned} \tag{6-85}$$

同样的方法，也可以得到

$$\begin{aligned} F_{\varphi3}^{(2)} = {} & \mathrm{i}\pi k_0^2 \sum_j \frac{\gamma_{2B}^*\tan\gamma_{1B}^* l_1[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho) - H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)]}{p'(\lambda_{jB}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(z+d)}\lambda_{jB}^* \\ & - \frac{\mathrm{i}2k_0^3\gamma_{20}\tan\gamma_{10}l_1}{\gamma_{10}\tan\gamma_{20}l_2 + \gamma_{20}\tan\gamma_{10}l_1}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\right. \\ & \left. + \mathrm{i}\sqrt{2}\pi\left(\Delta_2' - \frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2^*}F(-\mathrm{i}p_2^*)\right] \end{aligned} \tag{6-86}$$

最终可得

$$\begin{aligned} F_{\varphi3}(\rho, z+d) = {} & \pi k_0^2 \cdot \sum_j \frac{(\gamma_{1B}^*\tan\gamma_{2B}^* l_2 + \gamma_{2B}^*\tan\gamma_{1B}^* l_1)[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho) - H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)]}{p'(\lambda_{jB}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(z+d)}\lambda_{jB}^* \\ & - \mathrm{i}2k_0^3\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}} + \mathrm{i}\sqrt{2}\pi\left(\Delta_2' - \frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2^*}F(-\mathrm{i}p_2^*)\right] \end{aligned} \tag{6-87}$$

利用相同的方法，也可以得到磁型波的其他几个积分的解析表达式，即

$$\begin{aligned} F_{\rho3}(\rho, z+d) = {} & \pi k_0^2 \cdot \sum_j \frac{(\gamma_{1B}^*\tan\gamma_{2B}^* l_2 + \gamma_{2B}^*\tan\gamma_{1B}^* l_1)[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho) + H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)]}{p'(\lambda_{jB}^*)} \\ & \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(z+d)}\lambda_{jB}^* - \frac{2k_0^2}{\rho}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}} + \mathrm{i}\sqrt{2}\pi\left(\Delta_2' - \frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2^*}F(-\mathrm{i}p_2^*)\right] \end{aligned} \tag{6-88}$$

$$\begin{aligned} G_{\rho3}(\rho, z+d) = {} & \mathrm{i}\pi \cdot \sum_j \frac{\gamma_{0B}^*(\gamma_{1B}^*\tan\gamma_{2B}^* l_2 + \gamma_{2B}^*\tan\gamma_{1B}^* l_1)[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho) - H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)]}{p'(\lambda_{jB}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(z+d)}\lambda_{jB}^* \\ & + \mathrm{i}2\sqrt{2}k_0^2\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\left(\Delta_2' - \sqrt{2}\frac{z+d}{\rho}\right)\right. \end{aligned}$$

$$+\mathrm{i}\sqrt{2}\pi\left(\Delta_2'-\frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2^*}F(p_2^*)\Big] \tag{6-89}$$

$$G_{\varphi 3}(\rho,z+d)=\mathrm{i}\pi\cdot\sum_j \frac{\gamma_{0B}^*(\gamma_{1B}^*\tan\gamma_{2B}^* l_2+\gamma_{2B}^*\tan\gamma_{1B}^* l_1)[H_0^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)+H_2^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)]}{p'(\lambda_{jB}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(z+d)}\lambda_{jB}^*$$

$$+\frac{2\sqrt{2}k_0}{\rho}\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}\left(\Delta_2'-\sqrt{2}\frac{z+d}{\rho}\right)\right.$$

$$\left.+\mathrm{i}\sqrt{2}\pi\left(\Delta_2'-\frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2^*}F(p_2^*)\right] \tag{6-90}$$

$$G_{z1}(\rho,z+d)=2\pi\mathrm{i}\sum_j \frac{(\gamma_{1B}^*\tan\gamma_{2B}^* l_2+\gamma_{2B}^*\tan\gamma_{1B}^* l_1)H_1^{(1)}(\lambda_{jB}^*\rho)}{p'(\lambda_{jB}^*)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_{0B}^*(z+d)}\lambda_{jB}^{*2}$$

$$-2k_0^2\sqrt{\frac{1}{\pi k_0\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{k_0\rho}}+\mathrm{i}\sqrt{2}\pi\left(\Delta_2'-\frac{z+d}{\sqrt{2}\rho}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2^*}F(p_2^*)\right] \tag{6-91}$$

6.2.3 场分量的完整表达式

在得到电型波和磁型波分量的表达式后，加上直射波和理想反射波，就可以获得各场分量的完整表达式，具体如下：

$$E_{0\rho}(\rho,\varphi,z)=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\cos\varphi\left\{-\left[\frac{2k_0}{r_1^2}+\frac{2\mathrm{i}}{r_1^3}+\left(\frac{z-d}{r_1}\right)^2\left(\frac{\mathrm{i}k_0^2}{r_1}-\frac{3k_0}{r_1^2}-\frac{3\mathrm{i}}{r_1^3}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\right.$$

$$+\left[\frac{2k_0}{r_2^2}+\frac{2\mathrm{i}}{r_2^3}+\left(\frac{z+d}{r_2}\right)^2\left(\frac{\mathrm{i}k_0^2}{r_2}-\frac{3k_0}{r_2^2}-\frac{3\mathrm{i}}{r_2^3}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}$$

$$\left.+F_{\rho 2}(\rho,z+d)+F_{\rho 3}(\rho,z+d)\right\} \tag{6-92}$$

$$E_{0\varphi}(\rho,\varphi,z)=\frac{\omega\mu_0}{4\pi k_0^2}\sin\varphi\left[-\left(\frac{\mathrm{i}k_0^2}{r_1}-\frac{k_0}{r_1^2}-\frac{\mathrm{i}}{r_1^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}+\left(\frac{\mathrm{i}k_0^2}{r_2}-\frac{k_0}{r_2^2}-\frac{\mathrm{i}}{r_2^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}\right.$$

$$\left.+F_{\varphi 2}(\rho,z+d)+F_{\varphi 3}(\rho,z+d)\right] \tag{6-93}$$

$$E_{0z}(\rho,\varphi,z)=\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{r\pi k_0^2}\cos\varphi\left[-\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{k_0^2}{r_1}+\frac{3\mathrm{i}k_0}{r_1^2}-\frac{3}{r_1^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{k_0^2}{r_2}+\frac{3\mathrm{i}k_0}{r_2^2}-\frac{3}{r_2^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}+F_{z1}(\rho,z+d)\right] \tag{6-94}$$

$$B_{0\rho}(\rho,\varphi,z)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\sin\varphi\left[-\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_2}+G_{\rho 2}(\rho,z+d)+G_{\rho 3}(\rho,z+d)\right] \tag{6-95}$$

$$B_{0\varphi}(\rho,\varphi,z)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\cos\varphi\left[-\left(\frac{z-d}{r_1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r_1}\right.$$

$$+\left(\frac{z+d}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_2}+G_{\varphi2}(\rho,z+d)+G_{\varphi3}(\rho,z+d)\Big]$$

(6-96)

$$B_{0z}(\rho,\varphi,z)=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi}\sin\varphi\Big[-\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\left(\frac{k_0}{r_1}+\frac{\mathrm{i}}{r_1^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_1}+\left(\frac{\rho}{r_2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_0}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r_2}+G_{z1}(\rho,z+d)\Big]$$

(6-97)

式(6-92)至式(6-97)即为水平电偶极子在四层介质中激励的电磁场分量的解析表达式。如果区域 1 和区域 0 的介质采用完全相同的介电系数，即 $k_1=k_0$，或者区域 1 和区域 2 的介质采用完全相同的介电系数，即 $k_1=k_2$，以上的结果就可简化成第 4 章所述的三层介质情况。

6.3　计算结果和讨论

从式(6-91)至式(6-96)可以看出，吸附表面波的幅度在 $\boldsymbol{e}_\rho$ 方向是按照 $\rho^{-1/2}$ 衰减的，其波数位于 k_0 和 k_2 之间，可用牛顿迭代法求得。而侧面波的波数则与在空气中的波数是一样的。当源点和场点都在空气和上层介质的边界上或附近时，吸附表面波是场分量的主要部分。一旦源点或场点渐渐远离边界时，吸附表面波以指数方式迅速衰减，此时场分量主要部分则是侧面波。

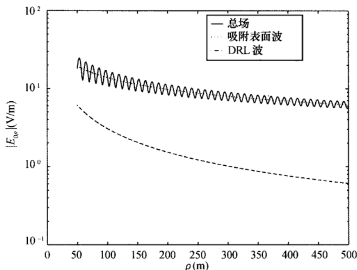


图 6-4　电场分量 $|E_{0\rho}|$ 在 $\varphi=0^\circ$ 上随传播距离 ρ 的变化关系曲线：$f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.65$，$\varepsilon_{r2}=4$，$k_1l_1=k_2l_2=0.8$，$z=d=0\text{m}$

图 6-4 和图 6-5 所示为总场、吸附表面波和 DRL 波(包括直射波、理想反射波及

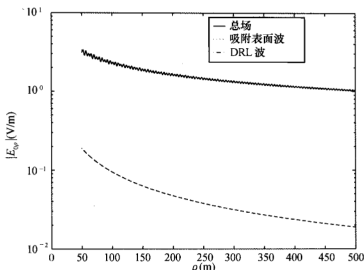


图 6-5 电场分量$|E_{0\rho}|$在 $\varphi=0^{\circ}$上随传播距离 ρ 的变化关系曲线：$f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.65,\varepsilon_{r2}=4,k_1l_1=k_2l_2=1.6,z=d=0\text{m}$

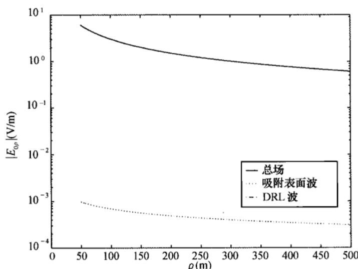


图 6-6 电场分量$|E_{0\rho}|$在 $\varphi=0^{\circ}$上随传播距离 ρ 的变化关系曲线：$f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.65,\varepsilon_{r2}=4,k_1l_1=k_2l_2=0.8,z=d=3\text{m}$

侧面波)随传播距离的变化关系曲线。作为比较，两图所取的介质层厚度不同，图 6-4 中取 $k_1l_1=k_2l_2=0.8$，图 6-5 中取 $k_1l_1=k_2l_2=1.6$。可以发现：在这两种情况下，吸附表面波是场分量的主要部分。如图 6-6 和图 6-7 所示，源点和场点的位置离开空气层和上层介质的边界面，$z=d=3\text{m}$，我们发现起主要作用的不再是吸附表面波，而是侧面波。

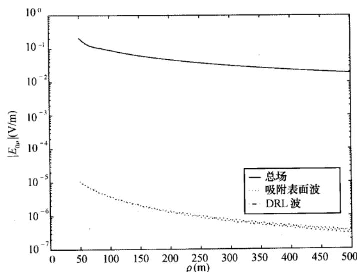


图 6-7　电场分量 $|E_{0\rho}|$ 在 $\varphi=0^{\circ}$ 上随传播距离 ρ 的变化关系曲线：$f=100\text{MHz}$，$\varepsilon_{r1}=2.65$，$\varepsilon_{r2}=4.0$，$k_1l_1=k_2l_2=1.6$，$z=d=3\text{m}$

在不同的介质层厚度下，水平电偶极子在四层介质中激励的场分量有很大不同，但我们可以通过调整两层介质层的厚度，来达到所期望的激励效果。

第 7 章

三层球面分层介质中的电磁场和电磁波

研究地球表面的电波传播问题时，如果工作频率位于低频段，则必须考虑地球曲率对电波传播的影响。低频电磁波绕球面传播问题的求解，数学推导十分复杂，前人已做了大量的研究，也出版了一些经典著作[13~27]。如果地面上覆盖有冻土层，或者海面上覆盖有冰层，则电磁波绕球形地面传播的问题将更为复杂。近年来，本书作者及合作者做了很多这方面的研究工作[101~105]。本章主要阐述：在把地球看作一般介质的情况下，分别给出垂直电偶极子和垂直磁电偶极子在三层球面分层介质中激励的场分量的解析表达式，然后根据互易定理，给出水平偶极子激励的场分量的解析表达式[102]。

7.1 垂直电偶极子在覆盖一层介质的地球表面激励的电磁场

7.1.1 空气层和介质层中的波场结构

首先分析垂直电偶极子在三层介质中激励的电磁场。本章所研究问题的物理模型由空气层（区域 0，$r \geqslant a$）、厚度为 l 的介质层（区域 1，$a-l \leqslant r \leqslant a$）和地球（区域 2，$r \leqslant a-l$）三个部分构成。相应地，三层介质中电磁波的传播波数可分别表示为

$$k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \tag{7-1}$$

$$k_1=\omega\sqrt{\mu_0\left(\varepsilon_0\varepsilon_{r1}+\frac{\mathrm{i}\sigma_1}{\omega}\right)} \tag{7-2}$$

$$k_2=\omega\sqrt{\mu_0\left(\varepsilon_0\varepsilon_{r2}+\frac{\mathrm{i}\sigma_2}{\omega}\right)} \tag{7-3}$$

式中：ε_r 表示相对介电系数；σ 表示电导率。

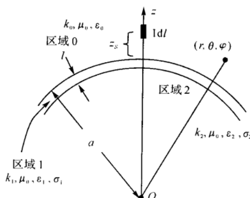


图 7-1　三层球形分层区域中垂直电偶极子的物理模型

在图 7-1 所示的球坐标系下，垂直电偶极子可以用电流密度 $\boldsymbol{e}_z I\mathrm{d}l\delta(x)\delta(y)\delta(z-b)$ 来表示，其中 $b=z_s+a$，z_s 表示源点距离所覆盖的介质层表面的高度。由于场源和介质对方位都是对称的，故可知，电磁场各分量将无方位变化，三层介质中的场分量 $E_r^{(i)}$、$E_\theta^{(i)}$ 和 $H_\varphi^{(i)}$ 能用势函数 U_i 来描述，可表示为

$$E_r^{(i)}=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k_i{}^2\right)(U_i r) \tag{7-4}$$

$$E_\theta^{(i)}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}(U_i r) \tag{7-5}$$

$$H_\varphi^{(i)}=-\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(U_i r) \tag{7-6}$$

式(7-4)至式(7-5)中的势函数 U_i 是标量亥姆霍兹方程的解，即

$$(\nabla^2+k_i^2)U_i=0 \tag{7-7}$$

其中，$i=0,1,2$。由于球坐标系的对称性，式(7-7)在球坐标系下可展开为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{U_i}{r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U_i}{\partial\theta}\right)+k_i^2U_i=0 \tag{7-8}$$

U_i 解的形式可表示为

$$U_i=\frac{1}{r}Z_i(r)\Phi(\theta) \tag{7-9}$$

利用分离变量法，可得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Phi(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]+\nu(\nu+1)\Phi(\theta)=0 \tag{7-10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Z_i(r)}{\mathrm{d}r^2}+k_i{}^2\left[1-\frac{\nu(\nu+1)}{k_i^2r^2}\right]Z_i(r)=0 \tag{7-11}$$

方程式(7-10)是勒让德微分方程，其解可用一阶勒让德函数 $P_\nu(\cos(\pi-\theta))$ 表示。式(7-11)为标准的斯托克斯方程，其中参数 t 与分离变量 $\nu(\nu+1)$ 的关系为

$$t=\left[\frac{a^3}{2\nu(\nu+1)}\right]^{\frac{2}{3}}\left[\frac{\nu(\nu+1)}{a^2}-k_0^2\right] \tag{7-12}$$

为了方程中的分离变量 $\nu(\nu+1)$ 都用参数 t 表示，从式(7-12)出发，可以得到

$$\nu(\nu+1)-k_0^2a^2=t[2\nu(\nu+1)]^{\frac{2}{3}} \tag{7-13}$$

当 $|t|\ll(k_0a)^{2/3}$ 时，利用迭代法可求解方程(7-13)，得

$$\nu(\nu+1)=k_0^2a^2\left[1+\frac{2^{\frac{2}{3}}t_n}{(k_0a)^{\frac{2}{3}}}+\frac{4\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{3}\frac{t_n^2}{(k_0a)^{\frac{4}{3}}}+\cdots\right] \tag{7-14}$$

由于 $|t|\ll(k_0a)^{2/3}$，则其近似值可取为

$$\nu(\nu+1)\approx k_0^2a^2\left[1+\frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot t_n}{(k_0a)^{\frac{2}{3}}}\right]\approx k_0^2a^2 \tag{7-15}$$

故有

$$y=\left[\frac{2\nu(\nu+1)}{a^3}\right]^{\frac{1}{3}}z\approx\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{\frac{1}{3}}k_0z \tag{7-16}$$

考虑到径向函数 $Z(y)$ 在 $y\to\infty$ 时应满足辐射条件，在区域 0 中，方程式(7-11)的解只能取

$$Z_0(r)=AW_2(t-y) \tag{7-17}$$

其中，$W_2(t)$ 是二阶爱里函数。爱里函数定义如下：

$$W_{1,2}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_{1,2}}e^{t\tau-\frac{\tau^3}{3}}\mathrm{d}t \tag{7-18}$$

其中，积分路径 Γ_1、Γ_2 如图 7-2 所示。

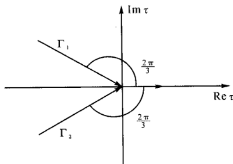


图 7-2　爱里函数的积分路径

当 t 是大的负值时，二阶爱里函数的渐近表达式可表示为

$$W_2(t)=(-t)^{-\frac{1}{4}}\exp\left\{i\left[\frac{2}{3}(-t)^{\frac{2}{3}}+\frac{\pi}{4}\right]\right\} \tag{7-19}$$

当 $y\to\infty$ 时，$t-y$ 趋于大的负值，故 $W_2(t-y)$ 代表向 y 正方向传播的波。

在区域 1(介质层)中，$a-l\leqslant r\leqslant a$，由于介质层的厚度 l 比地球半径小得多，即 $l\ll a$，故可取 $r\approx a$。考虑式(7-15)，方程式(7-11)可化简为

$$\frac{\mathrm{d}^2Z_1(r)}{\mathrm{d}r^2}+(k_1^2-k_0^2)Z_1(r)=0 \tag{7-20}$$

方程式(7-20)的解为

$$Z_1(r) = Be^{i\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot[r-(a-l)]} + Ce^{-i\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot[r-(a-l)]} \tag{7-21}$$

由 $r=a-l$ 处的表面阻抗的边界条件，可得

$$\left.\frac{E_\theta^{(1)}}{\eta_1 H_\varphi^{(1)}}\right|_{r=a-l} = -\Delta_g \tag{7-22}$$

在低频段，表面阻抗 Δ_g 可近似表示为

$$\Delta_g \approx \frac{k_1}{k_2}\sqrt{1-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2} \tag{7-23}$$

则

$$\Delta_e = \frac{C}{B} = \frac{\sqrt{k_1^2-k_0^2}-k_1\Delta_g}{\sqrt{k_1^2-k_0^2}+k_1\Delta_g} \tag{7-24}$$

在边界 $r=a$ 处，由边界条件 $E_\theta^{(0)}\big|_{z=a}=E_\theta^{(1)}\big|_{z=a}$ 和 $H_\varphi^{(0)}\big|_{z=a}=H_\varphi^{(1)}\big|_{z=a}$，可得

$$-AW_2'\cdot\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot k_0 = iB\sqrt{k_1^2-k_0^2}\left(e^{i\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l}-\Delta_e\cdot e^{-i\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l}\right) \tag{7-25}$$

$$A\cdot k_0^2 W_2 = B\cdot k_1^2\left(e^{i\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l}+\Delta_e\cdot e^{-i\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l}\right) \tag{7-26}$$

由式(7-25)和式(7-26)可得如下微分方程式：

$$W_2'(t)-qW_2(t)=0 \tag{7-27}$$

其中

$$q = \frac{-ik_0\sqrt{k_1^2-k_0^2}}{k_1^2}\cdot\left(\frac{k_0a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1-\Delta_e\cdot e^{-i2\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l}}{1+\Delta_e\cdot e^{-i2\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l}}\right) \tag{7-28}$$

球形导体模型下，$\Delta_g\to 0$，则 $\Delta_e=1$，式(7-28)可简化为

$$q = \frac{k_0\sqrt{k_1^2-k_0^2}}{k_1^2}\cdot\left(\frac{k_0a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\tan\left(\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l\right) \tag{7-29}$$

式(7-24)与文献[101]的结果一致。

若 t_s 是微分方程(7-27)的根，则区域 0(空气层)中的势函数可表示为

$$U_0 = \frac{1}{r}\sum A_s F_s(z_r)P_\nu(\cos(\pi-\theta)) \tag{7-30}$$

其中，归一化高度增益函数 $F_s(z_r)$ 可表示为

$$F_s(z_r) = \frac{W_2(t_s-y)}{W_2(t_s)} \tag{7-31}$$

7.1.2 利用源区条件确定激励系数

接下来我们需要确定式(7-30)中的系数 A_s。式(7-30)中的系数 A_s 代表各阶波形的激励强度，它由源区条件所决定。为了确定 A_s，首先阐明大气中各阶高度函数 $F_s(z)$ 的正交性，并求出它的模。

考虑积分

$$N_{sn}=\int_0^{\infty}\frac{W_2(t_s-y)}{W_2(t_s)}\frac{W_2(t_n-y)}{W_2(t_n)}\mathrm{d}z \tag{7-32}$$

因为 t_s 和 t_n 都是方程式(7-27)的根，以及 $F_n(y)$满足斯托克斯方程式(7-11)，故可求得

$$N_{sn}=\begin{cases}0 & s\neq n\\ \dfrac{1}{k_0}\left(\dfrac{k_0a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(t_s-q^2) & s=n\end{cases} \tag{7-33}$$

在式(7-30)两端乘以 $r\dfrac{W_2(t_n-y)}{W_2(t_n)}$，然后对 z 在 0 至∞上积分，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}rU_0\frac{W_2(t_n-y)}{W_2(t_n)}\mathrm{d}z&=\int_0^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}A_s\frac{W_2(t_s-y)}{W_2(t_s)}\frac{W_2(t_n-y)}{W_2(t_n)}P_\nu(\cos(\pi-\theta))\mathrm{d}z\\&=A_n\frac{1}{k_0}\left(\frac{k_0a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(t_n-q^2)P_\nu(\cos(\pi-\theta))\end{aligned} \tag{7-34}$$

故可得

$$A_n=\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{\frac{1}{3}}k_0\frac{\int_0^{\infty}rU_0\dfrac{W_2(t_n-y)}{W_2(t_n)}\mathrm{d}z}{(t_n-q^2)P_\nu\cos(\pi-\theta)} \tag{7-35}$$

式(7-35)对任意的 θ 都成立，因此在 θ 接近于 0 的场源附近亦应成立。为了利用场源附近的奇点性质，将式(7-34)中的积分进一步分解为

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}rU\frac{W_2(t_n-y)}{W_2(t_n)}\mathrm{d}z&=\int_0^{z_s-\delta}rU_0\frac{W_2(t_n-y)}{W_2(t_n)}\mathrm{d}z+\int_{z_s-\delta}^{z_s+\delta}rU_0\frac{W_2(t_n-y)}{W_2(t_n)}\mathrm{d}z\\&\quad+\int_{z_s+\delta}^{\infty}rU_0\frac{W_2(t_n-y)}{W_2(t_n)}\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{7-36}$$

式中：z_s 是发射源的离地高度；δ 是一有限小量。在此三段积分中，第一段和第三段因为不接近场源，故应是有限值；而第二项因为包含场源，所以当 $\theta\to0$ 时，应趋于无穷，故第一项和第三项可以忽略。

取 δ 相当小，当 $\theta\to0$ 时，在 $|z-z_s|\leqslant\delta$ 范围内，地面的影响可以忽略不计，势函数可用垂直电偶极子在自由空间的势函数来代替，即

$$U\xrightarrow[|z-z_s|\leqslant\delta]{\theta\to0}\frac{\mathrm{i}Idl\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0R}}{4\pi\omega\varepsilon_0r_sR}\approx\frac{\mathrm{i}Idl}{4\pi\omega\varepsilon_0r_0R} \tag{7-37}$$

其中，R 是场点与场源之间的距离，$r_0=a+z_s$。在场源附近

$$R\approx\sqrt{(r_0\theta)^2+(z-z_s)^2} \tag{7-38}$$

故可得

$$\int_{z_s-\delta}^{z_s+\delta}\frac{\mathrm{d}z}{R}\approx\int_{z_s-\delta}^{z_s+\delta}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(r_0\theta)^2+(z-z_s)^2}}\approx-\ln\theta^2 \tag{7-39}$$

因此，我们可以得到

$$\int_0^{\infty}rU_0\frac{W_2(t_n-y)}{W_2(t_n)}\mathrm{d}z\approx\frac{-\mathrm{i}Idl}{4\pi\omega\varepsilon_0}\frac{W_2(t_s-y_s)}{W_2(t_s)}\ln\theta^2 \tag{7-40}$$

其中

$$y_s = \left(\frac{2}{k_0 a}\right)^{\frac{1}{3}} k_0 z_s \tag{7-41}$$

当 $\theta \to 0$ 时，勒让德函数也为奇点，即

$$P_\nu(\cos(\pi-\theta)) \xrightarrow{\theta \to 0} \frac{\sin\nu\pi}{\pi} \ln\theta^2 \tag{7-42}$$

故可得

$$A_n = \left(\frac{2}{k_0 a}\right)^{\frac{1}{3}} k_0 \frac{-Idl W_2(t_n - y_s)}{4\pi\omega\varepsilon_0 W_2(t_n)} \frac{1}{t_n - q^2} \frac{\pi}{\sin\nu\pi} \tag{7-43}$$

由于传播一般都有损耗，故模方程的根一般都存在正虚部。因为 ν 相当大，且有正的虚部，所以有

$$\sin\nu\pi \approx \frac{i}{2} e^{-i\nu\pi} \tag{7-44}$$

故可得

$$A_n = -\left(\frac{2}{k_0 a}\right)^{\frac{1}{3}} k_0 \frac{Idl}{2\omega\varepsilon_0} e^{i\nu\pi} \frac{W_2(t_n - y_s)}{W_2(t_n)} \frac{1}{t_n - q^2} \tag{7-45}$$

即

$$A_s = -\left(\frac{2}{ka}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{k_0 Idl}{2\omega\varepsilon_0} \cdot \frac{F_s(z_s) \cdot e^{i\nu\pi}}{t_s - q^2} \tag{7-46}$$

7.1.3 空气层中电磁场分量的近似式

考虑 ν 很大而 θ 不很接近于零的情况，勒让德函数可以近似表示为

$$P_\nu(\cos(\pi-\theta)) = \sqrt{\frac{1}{2\pi k_0 a \sin\theta}} \cdot \exp[i(k_0 a\theta + t_s x)] \cdot \exp\left[i(\nu + \frac{1}{4})\pi\right] \tag{7-47}$$

其中

$$x = \left(\frac{k_0 a}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \theta \tag{7-48}$$

将式(7-46)和式(7-47)代入式(7-30)，可得势函数 U_0 的表达式，并将其代入式(7-4)至式(7-6)，最后可以得覆盖有电介质的球形地面上方$(a+z_s,0,0)$处的垂直电偶极子在空气中激励的电磁场分量 E_r、E_θ 和 $\eta_0 H_\varphi$ 的近似式。现在我们把三个电磁场分量写成如下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} E_r(a+z_r,\theta,\varphi) \\ E_\theta(a+z_r,\theta,\varphi) \\ \eta_0 H_\varphi(a+z_r,\theta,\varphi) \end{bmatrix} = \frac{iIdl \cdot \eta_0}{\lambda a} \cdot \frac{e^{i(k_0 a\theta + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\theta\sin\theta}} \cdot \sqrt{\pi x}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \sum_s \dfrac{F_s(z_s)\cdot F_s(z_r)}{t_s-q^2}\cdot e^{it_s x} \\ \sum_s \dfrac{iF_s(z_s)\cdot \left.\dfrac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_r}}{k_0(t_s-q^2)\left[1+\dfrac{t_s}{2}\left(\dfrac{2}{k_0 a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}\cdot e^{it_s x} \\ -\sum_s \dfrac{F_s(z_s)\cdot F_s(z_r)}{(t_s-q^2)\left[1+\dfrac{t_s}{2}\left(\dfrac{2}{k_0 a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}\cdot e^{it_s x} \end{bmatrix} \tag{7-49}$$

这里，$r=a+z_r$。必须指出的是，本章讨论的问题中源点和场点均须在空气层和介质层交界面附近，即 $z_s \ll a$ 和 $z_r \ll a$。当源点和场点远离空气层和介质层交界面时，则可以看做是电偶极子在无限大自由空间的辐射场的求解，问题将大大简化。

7.1.4 复宗量爱里函数的性质及其数值计算方法

在模方程式(7-27)和归一化高度增益函数式(7-31)中都包含有爱里函数。由于模方程的根必须在复平面上求解，因此必须分析爱里函数在整个复平面上的性质，以及它的数值计算方法。

按照爱里函数的定义：

$$W_2(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\Gamma_2} e^{z\tau-\frac{\tau^3}{3}}d\tau \tag{7-50}$$

它是斯托克斯方程的解：

$$W_2''(z)-qW_2(z)=0 \tag{7-51}$$

若对微分方程式(7-51)进行级数展开，则令

$$W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{7-52}$$

将式(7-52)代入方程式(7-51)，比较 z^n 项系数，即可得

$$\begin{aligned} W_2(z) = & W_2(0)\left(1+\frac{z^3}{2\times 3}+\frac{z^6}{(2\times 5)(3\times 6)}+\frac{z^9}{(2\times 5\times 8)(3\times 6\times 9)}+\cdots\right) \\ & +W_2'(0)\left(z+\frac{z^4}{3\times 4}+\frac{z^7}{(3\times 6)(4\times 7)}+\frac{z^{10}}{(3\times 6\times 9)(4\times 7\times 10)}+\cdots\right) \end{aligned} \tag{7-53}$$

其中，初始值 $W_2(0)$ 和 $W_2'(0)$ 可以由积分定义式(7-18)用数值积分方法直接算出，结果分别为

$$W_2(0) = \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}e^{i\frac{\pi}{6}} = 1.0899290710+0.6292708425i \tag{7-54}$$

$$W_2'(0)=\frac{2\sqrt{\pi}}{3^{\frac{4}{3}}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}e^{-i\frac{\pi}{6}}=0.7945704238-0.4587454481i \tag{7-55}$$

当$|z|<5.4$时，级数式(7-53)收敛得相当快，一般小于 10 项即可保证足够的精度。对于大宗量$|z|>5.4$，则级数式(7-53)收敛得较慢，爱里函数的计算应由大宗量时的渐近公式计算。大宗量的爱里函数渐近公式可表示为[31]

$$W_2(z)=e^{i\frac{\pi}{4}}(-z)^{-\frac{1}{4}}e^{i\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}+k\right)}{\left(\frac{4}{3}z^{\frac{3}{2}}\right)^{k}\Gamma\left(\frac{5}{6}-k\right)k!} \tag{7-56}$$

一般地，取$n=11$即已能保证足够的精度。

若记

$$z=te^{in\frac{\pi}{3}},\quad n=0,1,\cdots,5 \tag{7-57}$$

其中，令t为实数，将爱里函数分成实部和虚部两部分，即

$$W_2(t)=U(t)+iV(t) \tag{7-58}$$

则式(7-50)爱里函数的定义应有

$$U(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\tau^3}{3}}\left\{e^{t\tau}+e^{-\frac{t\tau}{2}}\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t\tau}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t\tau}{2}\right)\right]\right\}d\tau \tag{7-59}$$

$$V(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\tau^3}{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{t\tau}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\tau\right)\right]e^{-\frac{t\tau}{2}}d\tau \tag{7-60}$$

将式(7-57)代入式(7-59)和式(7-60)，可得

$$W_2(te^{i\frac{\pi}{3}})=2e^{i\frac{\pi}{6}}V(-t) \tag{7-61}$$

$$W_2(te^{i\frac{2\pi}{3}})=e^{i\frac{\pi}{3}}[U(t)-iV(t)] \tag{7-62}$$

$$W_2(te^{i\pi})=U(-t)+iV(-t) \tag{7-63}$$

$$W_2(te^{i\frac{4\pi}{3}})=2e^{i\frac{\pi}{6}}V(t) \tag{7-64}$$

$$W_2(te^{i\frac{5\pi}{3}})=e^{i\frac{\pi}{3}}[U(-t)-iV(-t)] \tag{7-64}$$

图 7-3 所示为$U(t)$和$V(t)$在t为实数时的变化曲线。从图中可以看出，当t为负实数时，$U(t)$和$V(t)$都是振荡衰减曲线。当t是正实数时，$U(t)$随t的增大趋于无穷，而$V(t)$随t的增大而趋于 0。

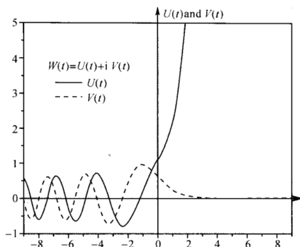


图 7-3　当 t 为实数时爱里函数的变化

7.1.5　模方程的根的计算

求模方程(7-27)的根，其中参数 q 取决于电磁波工作频率、地球半径 a、地面电导率和介质层的厚度及其介电特性。地面电导率和介质层的厚度及介电特性的影响可以用归一化表面阻抗 Δ_g 来表示。当地面是良导电地面，如海上传播时，Δ_g 很小，且不存在介质层，可作为一种理想化情况，取 $q=0$，此时式(7-27)可简化为

$$W_2'(t_s')=0 \tag{7-66}$$

如果传播路径上地面电导率很差，且不存在介质层，q 可能很大，作为一种极限情况，取 $q\to\infty$，则式(7-27)可简化为

$$W_2(t_s^0)=0 \tag{7-67}$$

由上节所阐述的爱里函数的性质可知，在 $e^{i\frac{\pi}{3}}$ 方向上，$W_2[te^{\frac{i}{3}}]=2\,e^{i\frac{\pi}{6}}V(-t)$，当 t 增大时，它具有振荡特性，故可以推知，式(7-66)和式(7-67)的零点都在 $te^{\frac{i}{3}}$ 方向上。由数值计算方法可以求出上述两种简单情况下模方程的根。Fock[27] 在 1964 年给出的结果为

$$t_1'=1.01879e^{i\frac{\pi}{3}},\quad t_1^0=2.33811e^{i\frac{\pi}{3}} \tag{7-68}$$

$$t_2'=3.24820e^{i\frac{\pi}{3}},\quad t_2^0=4.08795e^{i\frac{\pi}{3}} \tag{7-69}$$

$$t_3'=4.82010e^{i\frac{\pi}{3}},\quad t_3^0=5.520566e^{i\frac{\pi}{3}} \tag{7-70}$$

$$t_4'=6.16331e^{i\frac{\pi}{3}},\quad t_4^0=6.78671e^{i\frac{\pi}{3}} \tag{7-71}$$

$$t_5'=7.37218e^{i\frac{\pi}{3}},\quad t_5^0=7.94417e^{i\frac{\pi}{3}} \tag{7-72}$$

对于 $s=6$ 以上的零点，其近似式为

$$t_s'=\left(\frac{3x_s'}{2}\right)^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}},\quad t_s^0=\left(\frac{3x_s^0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}} \tag{7-73}$$

其中

$$x_s' = \left(s-\frac{3}{4}\right)\pi - \frac{0.123787}{4s-3} + \frac{0.07758}{(4s-3)^3} - \frac{0.389}{(4s-3)^5}, \quad s=6,7,8,\cdots \tag{7-74}$$

$$x_s^0 = \left(s-\frac{1}{4}\right)\pi + \frac{0.088419}{4s-1} - \frac{0.08328}{(4s-1)^3} + \frac{0.4065}{(4s-1)^5}, \quad s=6,7,8,\cdots \tag{7-75}$$

对于一般的情况，由电磁波工作频率、地球半径 a、地面电导率和介质层的厚度及其介电性质决定的参量 q，在既不为 0，也不为无穷的情况下，模方程的根可以由下列方法求出。将模方程(7-27)的左端看成 q 的函数，对 q 求导，可得

$$W_2''(t_s)\frac{dt_s}{dq} - qW_2'(t_s)\frac{dt_s}{dq} - W_2(t_s) = 0 \tag{7-76}$$

考虑到 $W_2''(t_s)=t_sW_2(t_s)$ 以及 $W_2'(t_s)=qW_2(t_s)$，即可得

$$\frac{dt_s}{dq} = \frac{1}{t_s - q^2} \tag{7-77}$$

式(7-77)表示模方程的根 t_s 随 q 变化的微分方程。以 $q=0$ 时，$t_s=t_s'$ 作为初值，对式(7-77)用一阶微分方程的龙格—库塔法进行数值求解，即可得 $q\neq 0$ 时的根 t_s。

如果 q 很大，也可以从 $q\to\infty$ 时所得到的 t_s^0 出发，求出 q 为有限值时的根 t_s。若记 $p=1/q$，则模方程(7-27)可写成

$$W_2(t_s) - pW_2'(t_s) = 0 \tag{7-78}$$

在式(7-78)两端对参数 p 求导，可得

$$\frac{dt_s}{dp} = \frac{1}{1-t_sp^2} \tag{7-79}$$

当 $p=0$ 时，Fock 已经求得 $t_s=t_s^0$。当 $p\neq 0$ 时，t_s 的值可以由微分方程(7-79)用数值方法求出。

Fock[27] 在 1964 年求出了 $t_s(q)$ 的级数表达式。当满足条件 $\left|\frac{q}{\sqrt{t_s}}\right|<1$ 时，$t_s(q)$ 的级数表达式为

$$t_s(q) = t_s' + \frac{q}{t_s'} - \frac{1}{2(t_s')^2}q^2 + \left(\frac{1}{3(t_s')^2} + \frac{1}{2(t_s')^5}\right)q^3 - \left(\frac{7}{12(t_s')^4} + \frac{5}{8(t_s')^7}\right)q^4 + \left(\frac{1}{5(t_s')^3} + \frac{21}{20(t_s')^6} + \frac{7}{8(t_s')^9}\right)q^5 + \cdots \tag{7-80}$$

对于 $\left|\frac{q}{\sqrt{t_s}}\right|\geqslant 1$，则

$$t_s(q) = t_s^0 + \frac{1}{q} + \frac{t_s^0}{3}\frac{1}{q^3} + \frac{1}{4q^4} + \frac{(t_s^0)^2}{5}\frac{1}{q^5} + \frac{7}{18}t_s^0\frac{1}{q^6} + \left(\frac{(t_s^0)^3}{7} + \frac{5}{28}\right)\frac{1}{q^7} + \frac{29}{60}(t_s^0)^2\frac{1}{q^8} + \cdots \tag{7-81}$$

在低频段，如果介质层的厚度不为零，则可用上述方法直接计算出参量 t_s。这里计算所用参数取为：地球半径为 $a=6370$km，介质层的相对介电系数 $\varepsilon_{r1}=12$ 和电导

率 $\sigma_1=10^{-5}$S/m，地球的相对介电系数 $\varepsilon_{r2}=80$ 和 $\sigma_2=4$S/m，则可以计算出 t_s 随介质层的厚度的变化关系。图 7-4 和 7-5 所示分别为 t_{s1} 和 $t_{s2}\sim t_{s5}$ 的实部和虚部随介质层的厚度的变化关系曲线。

值得注意的是，当电介质层的厚度 l 满足条件 $0<\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l<\pi/2$ 时，q 总是个纯虚数，并且随厚度 l 从零开始逐级增大。从图 7-4 可以看出，当 $l>45$m 时，t_{s1} 的实部显著增长，而 t_{s1} 的虚部很小，即传播衰减很小。当介质层厚度满足条件 $0<\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l<\pi/2$ 时，第一种传播模式沿着球形地表面衰减非常缓慢。

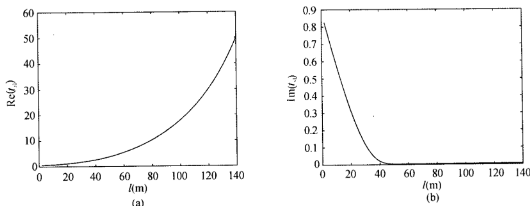


图 7-4　t_{s1} 随电介质层厚度 l 的变化规律

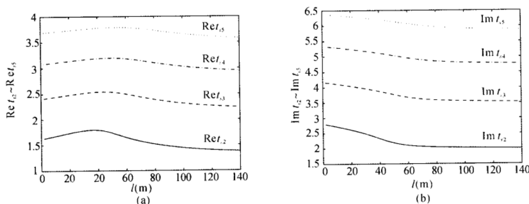


图 7-5　$t_{s2}\sim t_{s5}$ 随电介质层厚度 l 的变化规律

7.1.6　空气层中场分量的计算结果及讨论

在低频段，对于沥青或水泥覆盖的球形地面或冰层覆盖的球形海面，容易计算出电磁场各分量随传播距离和电介质层厚度的变化规律。图 7-6 和图 7-7 所示分别为不同厚度条件下单位垂直电偶极子在三层球面分层介质中激励的电场分量 $|E_r|$ 和磁

场分量$|H_\varphi|$随传播距离ρ的变化关系曲线。计算所用参数如下：$f=100\text{kHz}$，$a=6370\text{km}$，$\varepsilon_{r1}=12$，$\varepsilon_{r2}=80$，$\sigma_1=10^{-5}\text{S/m}$，$\sigma_2=4\text{S/m}$，$z_r=z_s=0\text{m}$。从图中可以看出，介质层的厚度$l=60\text{m}$时，场分量衰减要慢一些。电磁场受地球电导率的影响很大，当覆盖有电介质的地球具有高电导率时，电磁场迅速衰减。若假定地球是一理想导体，则覆盖有电介质的球形导体地表面的电磁波衰减率达到最大值。

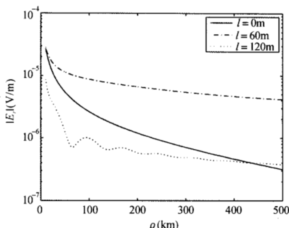


图 7-6　不同介质层厚度条件下电场分量$|E_r|$随传播距离ρ的变化关系曲线

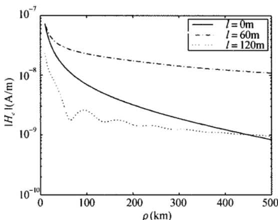


图 7-7　不同介质层厚度条件下磁场分量$|H_\varphi|$随传播距离ρ的变化关系曲线

7.2 垂直磁偶极子在覆盖一层介质的地球表面激励的电磁场

7.2.1 空气层和介质层中的波场结构

如果将图 7-1 所示的垂直电偶极子替换成磁矩为 $M=I\mathrm{d}a$ 的垂直磁偶极子，其中 $\mathrm{d}a$ 是线圈的面积，则电磁场的非零分量 $E_\varphi^{(i)}$、$H_r^{(i)}$ 和 $H_\theta^{(i)}$ 可以用势函数 V_i 来描述。由于场源和介质对方位都是对称的，故电磁场各分量将无方位变化，即可表示为

$$E_\varphi^{(i)}=-\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_i r) \tag{7-82}$$

$$H_r^{(i)}=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k_i^2\right)(V_i r) \tag{7-83}$$

$$H_\theta^{(i)}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}(V_i r) \tag{7-84}$$

这里，势函数 V_i 是标量亥姆霍兹方程的解

$$(\nabla^2+k_i^2)V_i=0,\quad i=0,1 \tag{7-85}$$

根据边界 $r=a-l$ 处的表面导纳边界条件，可得

$$\left.\frac{H_\theta^{(1)}}{E_\varphi^{(1)}}\right|_{r=a-l}=\frac{1}{\eta_1\Delta_g} \tag{7-86}$$

与 7.1 节的求解步骤相似，我们可以得到覆盖有介质层的球形地面上方的垂直磁偶极子在空气中激励的电磁场分量 E_φ、H_r 和 H_θ 的近似式。

$$\begin{bmatrix}E_\varphi\\ \eta_0 H_r\\ \eta_0 H_\theta\end{bmatrix}=\frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}a}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0 a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\begin{bmatrix}\sum\limits_s\frac{G_s(z_s)G_s(z_r)}{t_s-(q^h)^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s' x}\\ \sum\limits_s\frac{G_s(z_s)G_s(z_r)}{t_s-(q^h)^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s' x}\\ \sum\limits_s\frac{G_s(z_s)\left.\frac{\partial G_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_r}}{t_s-(q^h)^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s' x}\end{bmatrix} \tag{7-87}$$

其中

$$q^h=\frac{-\mathrm{i}\sqrt{k_1^2-k_0^2}}{k_0}\cdot\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1-\Delta_m\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l}}{1+\Delta_m\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot l}}\right) \tag{7-88}$$

$$\Delta_m=\frac{\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot\Delta_g+k_1}{\sqrt{k_1^2-k_0^2}\cdot\Delta_g-k_1} \tag{7-89}$$

球形理想导体模型下 $\Delta_g \to 0$，则 $\Delta_m = -1$，上述公式可简化为

$$q^h = -\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt{k_1^2 - k_0^2}}{k_0 \cdot \tan\left[\sqrt{k_1^2 - k_0^2} \cdot l\right]} \tag{7-90}$$

t'_s 是如下微分方程的根

$$W'_2(t'_s) - q^h W_2(t'_s) = 0 \tag{7-91}$$

式中：$W_2(t'_s)$是二阶爱里函数。归一化高度增益函数 $G_s(z_r)$为

$$G_s(z_r) = \frac{W_2(t'_s - y)}{W_2(t'_s)} \tag{7-92}$$

7.2.2　空气层中场分量的计算结果及讨论

在低频段，对于沥青或水泥覆盖的球形地面或冰层覆盖的球形海面，容易计算出电磁场各分量随传播距离和电介质层厚度的变化规律。首先，计算模方程式(7-91)的根 t'_s。图 7-8 所示为 $t'_{s1} \sim t'_{s5}$ 的实部和虚部随介质层的厚度的变化关系曲线。计算所用参数和上一节中图 7-4 和图 7-5 的取值完全相同。值得注意的是，q 总是负数，并且当电介质层的厚度 l 满足条件$0 < \sqrt{k_1^2 - k_0^2} \cdot l < \pi/2$ 时，q 将随 l 从负无穷大增大到零。通过比较图 7-4 和图 7-8 可以看出，垂直磁偶极子的第一种传播模式沿着球形地表面衰减比垂直偶极子要快。

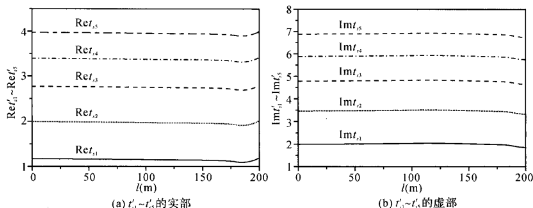


图 7-8　$t'_{s1} \sim t'_{s5}$ 随电介质层厚度 l 的变化关系曲线

图 7-9 和图 7-10 所示分别为不同厚度条件下单位垂直磁偶极子在三层球面分层介质中激励的电场分量$|E_\varphi|$和磁场分量$|H_r|$随传播距离 ρ 的变化关系曲线。计算所用参数和 7.1 节中图 7-6 和图 7-7 的取值完全相同。将图 7-9 和图 7-10 的计算结果和图 7-6 和图 7-7 的比较可以发现：电偶极子激励的电磁场的垂直分量$|E_r|$比其余分量要大很多。因此，在实际的应用中，仅需要计算电场垂直分量$|E_r|$。

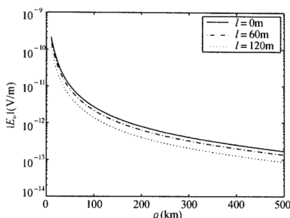


图 7-9　不同介质层厚度情况下电场分量$|E_\varphi|$随传播距离 ρ 的变化关系曲线

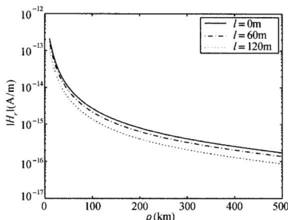


图 7-10　不同介质层厚度情况下磁场分量$|H_r|$随传播距离 ρ 的变化关系曲线

7.3　水平电偶极子在覆盖一层介质的地球表面激励的电磁场

水平电偶极子在覆盖一层介质的地球表面上激励的电磁场，可以由前面两节得出的垂直电偶和磁偶极子激励的电磁场分量的解析表达式通过各向同性介质中的互易定理求得。如果收发天线的相互几何关系如图 7-11 所示，图中垂直电偶极子(VE)位于 $z_0'=z_s$，而水平电偶极子(HE)位于 $z_0=z_r$，下标 r 和 s 分别代表接收与发射。

由 z_0' 处的垂直电偶极子在 z_r 处的水平接收偶极天线上感应的电压，应该是由垂

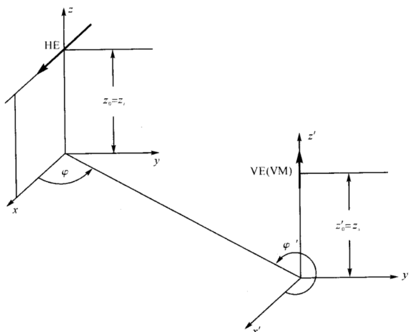


图 7-11　互易定理收发天线相互几何关系示意图

直电偶极子在 z_r 处产生的水平电场分量 E_ρ 乘以水平电偶极子的方向性因子，即

$$V^{\mathrm{HE}}=-E_\rho^{\mathrm{VE}}(z'_0=z_s,z_0=z_r)\cos\varphi\mathrm{d}l^{\mathrm{HE}} \tag{7-93}$$

反过来，水平电偶极子作为发射天线，它上面流过同样的电流时，在 z'_0 处的垂直天线上感应的电压应为

$$V^{\mathrm{VE}}=E_z^{\mathrm{HE}}(z_0=z_s,z'_0=z_r)\mathrm{d}s^{\mathrm{VE}} \tag{7-94}$$

如果这两个电偶极子的长度相等，即 $\mathrm{d}l^{\mathrm{HE}}=\mathrm{d}s^{\mathrm{VE}}$，则由互易定理可得

$$E_z^{\mathrm{HE}}(z_0=z_s,z'_0=z_r)=-E_\rho^{\mathrm{VE}}(z'_0=z_s,z_0=z_r)\cos\varphi \tag{7-95}$$

故由式(7-49)和式(7-95)可得水平电偶极子在空气层中产生的电场垂直分量，即径向分量为

$$E_r^{\mathrm{HE}}=-\frac{\mathrm{i}\eta_0 I\mathrm{d}s^{\mathrm{HE}}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\cos\varphi \cdot\sum_s\frac{\mathrm{i}F_s(z_r)\cdot\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_s}}{(t_s-q^2)\left[1+\frac{t_s}{2}\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_sx} \tag{7-96}$$

再考虑，如果在 z'_0 处有一个平行于地面放置的小环天线，它可以理想化为一个垂直磁偶极子，则若它作为发射天线，在 z_0 处产生的惟一的电场水平分量就为 E_φ，故在 z_0 处的水平电偶极子上感应的电压应为

$$V^{\mathrm{HE}}=E_{\varphi'}^{\mathrm{VM}}(z_0'=z_s,z_0=z_r)\sin\varphi\cdot \mathrm{d}s^{\mathrm{HE}} \tag{7-97}$$

式中：上标 VM 表示垂直磁偶极子。

如果用水平电偶极子作为发射天线，流过的电流与小环天线作为发射天线时同样大小，则小环天线上感应的电压为

$$V^{\mathrm{VM}}=\mathrm{i}\mu_0\omega H_z^{\mathrm{HE}}(z_0=z_s,z_0'=z_r)\mathrm{d}a^{\mathrm{VM}} \tag{7-98}$$

按照互易定理，应有

$$H_z^{\mathrm{HE}}(z_0=z_s,z_0'=z_r)=\frac{1}{\mathrm{i}\mu_0\omega}E_{\varphi'}^{\mathrm{VM}}(z_0'=z_s,z_0=z_r)\sin\varphi\frac{\mathrm{d}s^{\mathrm{HE}}}{\mathrm{d}a^{\mathrm{VM}}} \tag{7-99}$$

由式 (7-87) 和 式(7-99) 可得水平电偶极子在空气层中产生的电场垂直分量，即径向分量为

$$H_r^{\mathrm{HE}}=-\frac{\mathrm{i}I\mathrm{d}s^{\mathrm{HE}}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\sin\varphi \cdot\sum_s\frac{G_s(z_s)\cdot G_s(z_r)}{t_s'-(q^h)^2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s'x} \tag{7-100}$$

球坐标系下，从麦克斯韦方程出发，其他的四个场分量可以用 E_r^{HE} 和 H_r^{HE} 表示。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)(rH_\varphi^{\mathrm{HE}})=\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\frac{\partial E_r^{\mathrm{HE}}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 H_r^{\mathrm{HE}}}{\partial r\partial\varphi} \tag{7-101}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)(rE_\theta^{\mathrm{HE}})=\frac{\partial^2 E_r^{\mathrm{HE}}}{\partial r\partial\theta}+\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{\sin\theta}\frac{\partial H_r^{\mathrm{HE}}}{\partial\varphi} \tag{7-102}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)(rH_\theta^{\mathrm{HE}})=-\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}{\sin\theta}\frac{\partial E_r^{\mathrm{HE}}}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2 H_r^{\mathrm{HE}}}{\partial r\partial\theta} \tag{7-103}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)(rE_\varphi^{\mathrm{HE}})=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 E_r^{\mathrm{HE}}}{\partial r\partial\varphi}-\mathrm{i}\omega\mu_0\frac{\partial H_r^{\mathrm{HE}}}{\partial\theta} \tag{7-104}$$

由式(7-101) 可得

$$\frac{\nu(\nu+1)}{r}H_\varphi^{\mathrm{HE}}=\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\frac{\partial E_r^{\mathrm{HE}}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 H_r^{\mathrm{HE}}}{\partial r\partial\varphi} \tag{7-105}$$

由于关系式 $\nu(\nu+1)\approx k_0^2a^2$，故磁场分量 H_φ^{HE} 可表示为

$$H_\varphi^{\mathrm{HE}}=-\frac{\mathrm{i}I\mathrm{d}s^{\mathrm{HE}}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\cos\varphi \cdot\left[\sum_s\frac{\mathrm{i}F_s(z_r)\cdot\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_s}}{t_s-q^2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_sx}+\frac{1}{k_0a\sin\theta}\cdot\sum_s\frac{\left.\frac{\partial G_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_r}\cdot G_s(z_s)}{t_s'-(q^h)^2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s'x}\right] \tag{7-106}$$

类似地，我们可以写出其余三个分量的解析表达式，分别为

$$H_\theta^{\mathrm{HE}}=\frac{I\mathrm{d}s^{\mathrm{HE}}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\sin\varphi$$

$$\cdot\left[\frac{\mathrm{i}}{k_0a\sin\theta}\sum_s\frac{F_s(z_r)\cdot\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_s}}{(t_s-q^2)\left[1+\frac{t_s}{2}\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_sx}-\sum_s\frac{\left.\frac{\partial G_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_r}\cdot G_s(z_s)}{t_s'-(q^h)^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s'x}\right]\tag{7-107}$$

$$E_\theta^{\mathrm{HE}}=\frac{\eta_0 I\mathrm{d}s^{\mathrm{HE}}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\cos\varphi$$
$$\cdot\left[-\mathrm{i}\sum_s\frac{\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_r}\cdot\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_s}}{t_s-q^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_sx}+\frac{1}{k_0a\sin\theta}\cdot\sum_s\frac{G_s(z_r)\cdot G_s(z_s)}{t_s'-(q^h)^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s'x}\right]\tag{7-108}$$

$$E_\varphi^{\mathrm{HE}}=\frac{\mathrm{i}\eta_0 I\mathrm{d}s^{\mathrm{HE}}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\sin\varphi$$
$$\cdot\left[\frac{\mathrm{i}}{k_0a\sin\theta}\sum_s\frac{\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_r}\cdot\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_s}}{(t_s-q^2)\left[1+\frac{t_s}{2}\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{2/3}\right]}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_sx}+\sum_s\frac{G_s(z_r)\cdot G_s(z_s)}{t_s'-(q^h)^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s'x}\right]\tag{7-109}$$

式中:上标 HE 表示这是水平电偶极子激励的场。

接下来,讨论电磁场分量的级数表达式的收敛性。利用下面的关系式来确定计算水平电偶极子激励的电场分量 E_r 所需要的级数项 N。如果需要更高的计算精度,则需要取更多的级数项。

$$\frac{|E_s|}{\left|\sum_{s=1}^{N}E_n\right|}\leqslant 0.01\tag{7-101}$$

如果 x 值很小,即场点离源点很近时,那么式(7-49)、式(7-87),式(7-96)和式(7-106)至式(7-109)中的级数收敛缓慢,为了保证计算精度,则需要计算较大数目的项数。如表 7-1所示,当 $l=0\mathrm{m}$,$z_r=z_s=0\mathrm{m}$ 时,在不同频率和不同距离的情况下计算式(8-50)中的级数和所需要的项数。为了说明电介质层的厚度对级数收敛性的影响,如表 7-2 所示,当 $l=120\mathrm{m}$,$z_r=z_s=0\mathrm{m}$ 时,在不同频率和不同距离的情况下计算式(8-50)中的级数和所需要的项数。由此,可以看出:当场点与源点距离比较近的时候,介质层的厚度对级数收敛性的影响较大,计算级数时所需要的项数较多。在 $x\leqslant 0.2$ 的情况下,电磁场分量的解析表达式(7-49),式(7-87),式(7-96)和式(7-106)至式(7-109)不再适用。在计算中,当 $x<0.2$ 时,第 3 到第 6 章所述的平坦地面的计算公式是较好的近似;当 $x>0.2$ 时,球形地面的公式则是较好的近似。

表 7-1 当 $l=0$ 时，在不同频率和不同距离下计算电场强度 $|E_r|$ 所需要的项数

ρ	100kHz	200kHz	300kHz	1MHz	2MHz
1km	61	61	62	58	57
10km	41	38	36	29	26
50km	17	14	12	9	8
100km	10	8	7	5	4
200km	6	5	4	3	3

表 7-2 当 $l=120\text{m}$ 时，在不同频率和不同距离下计算电场强度 $|E_r|$ 所需要的项数

ρ	100kHz	200kHz	300kHz	1MHz	2MHz
1km	93	123	103	95	87
10km	71	75	73	58	38
50km	20	28	17	19	7
100km	7	14	10	9	3
200km	3	7	6	5	2

7.4 本章小结

本章首先导出了垂直电偶极子和垂直磁偶极子在三层球面分层介质中的电磁场分量的解析表达式；然后利用互易定理，给出了水平电偶极子在三层球面分层介质中激励的电磁场的解析表达式。垂直电偶极子激励的径向场分量仅有径向电场分量，而径向磁场分量为零。与之相反的是，垂直磁偶极子激励的径向场分量仅包括径向磁场分量，而径向电场分量为零。为了和前面平面分层介质中的称谓相一致，我们分别把垂直电偶极子和垂直磁偶极子激励的电磁波分量称为电型波和磁型波。水平电偶极子激励的电磁波场分量由电型波和磁型波组成。

对于水平电偶极子源置于地下的情况，本书作者也做了深入研究[103]，由于和本章方法基本相似，所以本书没有把这部分内容收录进来。

第 8 章

覆盖多层介质的球形地面上的电磁场和电磁波

本书第 7 章在把地球看成一般介质的情况下，研究了偶极子在三层球面分层介质中激励的电磁场和电磁波。更一般的情况是，覆盖于球形地面的介质是非均匀的，由很多层介质组成。本章首先介绍垂直电偶极子和垂直磁电偶极子在覆盖 n 层介质的球形地面上激励的电磁场分量的解析表达式；然后根据互易定理，给出水平偶极子激励的电磁场分量的解析表达式[104]。

8.1 垂直电偶极子在覆盖多层介质的球形地面上激励的电磁场

本章所研究问题的物理模型如图 8-1 所示，由空气层、n 层介质和地球构成。将球心置于球坐标系(r,θ,φ)的原点，区域 $0(r\geqslant a)$是空气层，球形地面上方所覆盖的是 n 层介质，其总厚度为 $l=l_1+l_2+\cdots+l_n$，其中第 j 层$(a-l'_j\leqslant r\leqslant a-l'_{j-1}, j=1,2,\cdots,n)$的电磁特性可用磁导率 μ_0、相对介电系数 ε_{rj} 和电导率 σ_j 来描述；区域 $n+1(r\leqslant a-l'_n)$是地球，其电磁特性可用磁导率 μ_0、相对介电系数 $\varepsilon_{r(n+1)}$ 和电导率 σ_{n+1} 来描述。各区域中的传播波数可表示为

$$k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \tag{8-1}$$

$$k_j=\omega\sqrt{\mu_0(\varepsilon_0\varepsilon_{rj}+\mathrm{i}\sigma_j/\omega)},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{8-2}$$

$$k_{n+1}=\omega\sqrt{\mu_0(\varepsilon_0\varepsilon_{r(n+1)}+\mathrm{i}\sigma_{n+1}/\omega)} \tag{8-3}$$

首先，分析覆盖有 n 层介质的球形地面上方的垂直电偶极子激励的电磁场。在图 8-1 所示的球坐标系下，垂直电偶极子可用电流密度 $\boldsymbol{e}_z I\mathrm{d}l\delta(x)\delta(y)\delta(z-b)$来表示，其中 $b=z_s+a$，$z_s>0$表示偶极子的高度。由于场源和介质对方位都是对称的，故可知，电磁场各分量将无方位变化，任意一层介质中的场分量 $E_r^{(j)}$、$E_\theta^{(j)}$ 和 $H_\varphi^{(j)}$ 都可以用势函数 U_i 来描述，分别可表示为

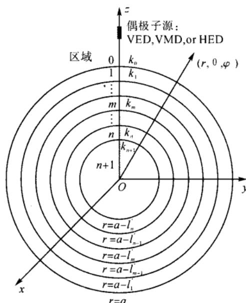


图 8-1 覆盖 n 层介质球形地面上方 z_s 处的偶极子源

$$E_r^{(j)}=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k_j^2\right)(U_j r) \tag{8-4}$$

$$E_\theta^{(j)}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}(U_j r) \tag{8-5}$$

$$H_\varphi^{(j)}=-\frac{i\omega\varepsilon_j}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(U_j r) \tag{8-6}$$

其中,势函数 U_j 是标量亥姆霍兹方程的解。

$$(\nabla^2+k_j^2)U_j=0 \tag{8-7}$$

其中,$j=0,1,2,\cdots,n+1$。由于球坐标系的对称性,势函数 U_j 的解可表示为

$$U_j=\frac{1}{r}R_j(r)\Phi(\theta) \tag{8-8}$$

电磁场随方位角的变化可以用一阶勒让德函数 $P_\nu(\cos(\pi-\theta))$ 及其微分形式来表示。电磁场在径向方向上的变化是由斯托克斯方程确定的。

$$\frac{d^2R_j(r)}{dr^2}+k_j^2\left[1-\frac{\nu(\nu+1)}{k_j^2r^2}\right]R_j(r)=0 \tag{8-9}$$

在区域 0 中,方程(8-9)的解可用二阶爱里函数来表示。在任意一层介质中,由于 $l'_j\ll a$,可近似认为 $r\approx a$。由第 7 章的分析可知,式(8-9)可简化为

$$\frac{d^2R_j(r)}{dr^2}+(k_j^2-k_0^2)R_j(r)=0,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{8-10}$$

其解的形式可表示为

$$R_j(r)=B_j e^{i\gamma_j[r-(a-l'_j)]}+C_j e^{-i\gamma_j[r-(a-l'_j)]} \tag{8-11}$$

式中:$\gamma_j=\sqrt{k_j^2-k_0^2}$,$j=1,2,\cdots,n$。

为了求解方便，第 j 层介质中任意点处的表面阻抗可定义为

$$Z_j(r)=\frac{E_\theta^{(j)}}{H_\varphi^{(j)}} \tag{8-12}$$

利用 $r=a-l'_n$ 处的阻抗边界条件，可得

$$Z_n(r)\big|_{r=a-l'_n}=\frac{E_\theta^{(n)}}{H_\varphi^{(n)}}\bigg|_{r=a-l'_n}=-\eta_n\cdot\Delta_g \tag{8-13}$$

式中：$\eta_n=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_n}}$，$l'_n=l_1+l_2+\cdots+l_n=l$。在低频段，边界 $z=r-l$ 处的归一化表面阻抗可近似为

$$\Delta_g\approx\frac{k_n}{k_{n+1}}\sqrt{1-\left(\frac{k_n}{k_{n+1}}\right)^2} \tag{8-14}$$

将式(8-11)代入式(8-8)，并考虑电磁场随方位角的变化的情况下，可以用一阶勒让德函数 $P_\nu(\cos(\pi-\theta))$ 及其微分形式来表示，从而可得势函数的表达式。再将其代入式(8-5)和式(8-6)，即可以写出电磁场分量解的表达式；然后根据表面阻抗的定义式(8-12)，可得区域 $n(a-l'_n\leqslant r\leqslant a-l'_{n-1})$ 中的任意点的表面阻抗为

$$\begin{aligned}Z_n(r)&=-\frac{\omega\mu_0\gamma_n}{k_n^2}\cdot\frac{B_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l'_n)]}-C_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l'_n)]}}{B_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l'_n)]}+C_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l'_n)]}}\\&=-\frac{\omega\mu_0\gamma_n}{k_n{}^2}\cdot\frac{\dfrac{B_n}{C_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l'_n)]}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l'_n)]}}{\dfrac{B_n}{C_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l'_n)]}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l'_n)]}}\\&=-\frac{\omega\mu_0\gamma_n}{k_n{}^2}\cdot\tanh\left\{\ln\left(\frac{B_n}{C_n}\right)^{\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l'_n)]\right\}\end{aligned} \tag{8-15}$$

根据边界 $r=a-l'_n$ 处的连续性，可得

$$Z_n(r)=-\frac{\omega\mu_0\gamma_n}{k_n{}^2}\cdot\tanh\left\{\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l'_n)]+\tanh^{-1}\left(\frac{k_n\cdot\Delta_g}{\gamma_n}\right)\right\} \tag{8-16}$$

利用恒等式

$$\tanh(a+\tanh^{-1}b)=\coth(a+\coth^{-1}b) \tag{8-17}$$

式(8-16)可改写为

$$Z_n(r)=-\frac{\omega\mu_0\gamma_n}{k_n{}^2}\cdot\coth\left\{\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l'_n)]+\coth^{-1}\left(\frac{k_n\cdot\Delta_g}{\gamma_n}\right)\right\} \tag{8-18}$$

将式(8-15)中的 n 换成 $n-1$，可得区域 $n-1$ 中任意点的表面阻抗，即

$$Z_{n-1}(r)=-\frac{\omega\mu_0\gamma_{n-1}}{k_{n-1}{}^2}\cdot\tanh\left\{\ln\left(\frac{B_{n-1}}{C_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}+\mathrm{i}\gamma_{n-1}[r-(a-l'_{n-1})]\right\} \tag{8-19}$$

式中：$a-l'_{n-1}\leqslant r\leqslant a-l'_{n-2}$。

由边界条件

$$Z_{n-1}(r)\big|_{r=a-l'_{n-1}}=Z_n(r)\big|_{r=a-l'_{n-1}} \tag{8-20}$$

可得

$$\ln\left(\frac{B_{n-1}}{C_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}=\tanh^{-1}\left\{\frac{\gamma_n k_{n-1}^2}{\gamma_{n-1}k_n^2}\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_n l_n+\tanh^{-1}\left(\frac{k_n\Delta_g}{\gamma_n}\right)\right]\right\} \tag{8-21}$$

将式(8-21)代入式(8-19),则可得

$$Z_{n-1}(r)=-\frac{\omega\mu_0\gamma_{n-1}}{k_{n-1}^2}\cdot\left\{\mathrm{i}\gamma_{n-1}[r-(a-l'_{n-1})]\right.$$
$$\left.+\tanh^{-1}\left(\frac{\gamma_n k_{n-1}^2}{\gamma_{n-1}k_n^2}\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_n l_n+\tanh^{-1}\left(\frac{k_n\Delta_g}{\gamma_n}\right)\right]\right)\right\} \tag{8-22}$$

其中,$l_n=l'_n-l'_{n-1}$是第 n 层的厚度。

延续上述步骤,区域 1 中的表面阻抗可表示为

$$Z_1(r)=-\frac{\omega\mu_0\gamma_1}{k_1^2}\cdot\tanh\left\{\mathrm{i}\gamma_1[r-(a-l'_1)]+\tanh^{-1}\left[\frac{\gamma_2k_1^2}{\gamma_1k_2^2}\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_2l_2+\tanh^{-1}\left[\frac{\gamma_3k_2^2}{\gamma_2k_3^2}\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_3l_3+\cdots+\tanh^{-1}\left[\frac{\gamma_nk_{n-1}^2}{\gamma_{n-1}k_n^2}\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_nl_n+\tanh^{-1}\left(\frac{k_n\Delta_g}{\gamma_n}\right)\right]\right]\cdots\right]\right]\right]\right]\right\} \tag{8-23}$$

利用边界条件

$$Z_0(r)|_{r=a}=Z_1(r)|_{r=a} \tag{8-24}$$

则空气层中的表面阻抗可表示为

$$Z_0(r)|_{r=a}=-\frac{\omega\mu_0\gamma_1}{k_1^2}\cdot\tanh\left\{\mathrm{i}\gamma_1l_1+\tanh^{-1}\left[\frac{\gamma_2k_1^2}{\gamma_1k_2^2}\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_2l_2+\tanh^{-1}\left[\frac{\gamma_3k_2^2}{\gamma_2k_3^2}\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_3l_3+\cdots+\tanh^{-1}\left[\frac{\gamma_nk_{n-1}^2}{\gamma_{n-1}k_n^2}\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_nl_n+\tanh^{-1}\left(\frac{k_n\Delta_g}{\gamma_n}\right)\right]\right]\cdots\right]\right]\right]\right]\right\} \tag{8-25}$$

注意,如果令 $l_1=l,l_2=l_3=\cdots=l_n=0$,则可简化为三层区域情况。式(8-25)也可简化为

$$Z_0(r)|_{r=a}=-\frac{\omega\mu_0\gamma_1}{k_1^2}\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_1l+\tanh^{-1}\left(\frac{k_1\Delta_g}{\gamma_1}\right)\right] \tag{8-26}$$

根据边界 $r=a$ 处的表面阻抗边界条件,有

$$\left.\frac{E_\theta^{(0)}}{H_\varphi^{(0)}}\right|_{z=a}=Z_0(r)|_{z=a}=Z_0(a) \tag{8-27}$$

利用第 7 章相类似的方法,可得微分方程为

$$\frac{W'_2\cdot\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot k_0}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\cdot W_2}=Z_0(a) \tag{8-28}$$

微分方程形式可以改写为

$$W_2'(t)-qW_2(t)=0 \tag{8-29}$$

其中

$$q=\mathrm{i}\,\frac{1}{\eta_0}\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot Z_0(a) \tag{8-30}$$

式中：$\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$，$W_2$ 是二阶爱里函数。

当地球表面覆盖 n 层介质时，$Z_0(a)$ 由式(8-25)表示。当覆盖地球表面的 n 层介质完全相同时，则可简化为第 7 章所述的三层区域的情况，$Z_0(a)$ 的表达式可简化为式(8-26)。将式(8-26)代入式(8-30)后，经过一系列变换后，和第 7 章给出的结果完全相同。即本章的结果可以简化为三层区域情况。

采用与第 7 章相类似的方法，容易导出覆盖有 n 层介质的球形地面上方($a+z_s$，0，0)处的垂直电偶极子在空气中激励的电磁场分量 E_r、E_θ 和 $\eta_0 H_\varphi$ 的解析表达式，即

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ \eta_0 H_\varphi \end{bmatrix}=\frac{\mathrm{i}I\mathrm{d}l\eta_0}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0 a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}$$

$$\cdot\begin{bmatrix} \displaystyle\sum_s \frac{F_s(z_s)\cdot F_s(z_r)}{t_s-q^2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s x} \\ \displaystyle\sum_s \frac{\mathrm{i}F_s(z_s)\cdot \left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_r}}{k_0(t_s-q^2)\left[1+\frac{t_s}{2}\left(\frac{2}{ka}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s x} \\ \displaystyle\sum_s \frac{F_s(z_s)\cdot F_s(z_r)}{(t_s-q^2)\left[1+\frac{t_s}{2}\left(\frac{2}{ka}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s x} \end{bmatrix} \tag{8-31}$$

其中，t_s 是方程式(8-29)的根，它与传播模式相对应。z_s 表示源点的高度；z_r 表示场点的高度。由于源点和场点均接近空气和介质层的分界面，故条件 $z_s\ll a$ 和 $z_r\ll a$ 成立。

$$x=\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\theta \tag{8-32}$$

归一化高度增益函数 $F_s(z)$ 可表示为

$$F_s(z)=\frac{W_2(t_s-y)}{W_2(t_s)} \tag{8-33}$$

其中

$$y=\left[\frac{2\nu(\nu+1)}{a^3}\right]^{\frac{1}{3}}z\approx\left(\frac{2}{k_0 a}\right)^{\frac{1}{3}}k_0 z \tag{8-34}$$

8.2 垂直磁偶极子在覆盖多层介质的球形地面上激励的电磁场

如果将图 8-1 所示的激励源换成具有磁矩 $M=Ida$ 的垂直磁偶极子，其中 da 是线圈的面积，那么电磁场的非零分量 $E_\varphi^{(j)}$、$H_r^{(j)}$ 和 $H_\theta^{(j)}$ 就可以用势函数 V_j 来描述。由于场源和介质对方位都是对称的，故可知，电磁场各分量将无方位变化，可表示为

$$E_\varphi^{(j)}=-\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_j r) \tag{8-35}$$

$$H_r^{(j)}=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k_j^{\,2}\right)(V_j r) \tag{8-36}$$

$$H_\theta^{(j)}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}(V_j r) \tag{8-37}$$

其中，势函数 V_j 是标量亥姆霍兹方程的解。

$$(\nabla^2+k_j^{\,2})V_j=0 \tag{8-38}$$

为了求解方便，我们定义第 j 层的表面导纳如下：

$$Y_j(r)=\frac{H_\theta^{(j)}}{E_\varphi^{(j)}} \tag{8-39}$$

根据边界 $r=a-l_n'$ 处的边界条件，可得

$$Y_n(r)\big|_{r=a-l'_n}=\frac{H_\theta^{(n)}}{E_\varphi^{(n)}}\bigg|_{r=a-l'_n}=\frac{1}{\eta_n\Delta_g} \tag{8-40}$$

显然，区域 $n(a-l_n'\leqslant r\leqslant a-l_{n-1}')$ 中的任意点的表面导纳可表示为

$$Y_n(r)=-\frac{\gamma_n}{\omega\mu_0}\cdot\frac{B_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l_n')]}-C_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l_n')]}}{B_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l_n')]}+C_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_n[r-(a-l_n')]}} \tag{8-41}$$

与第 2 部分的求解步骤相同，我们可直接写出空气层中表面导纳的表达式，即

$$Y_0(r)|_{r=a}=-\frac{\gamma_1}{\omega\mu_0}\left\{\mathrm{i}\gamma_1 l_1+\tanh^{-1}\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\cdot\tanh+\left[\mathrm{i}\gamma_2 l_2+\tanh^{-1}\left[\frac{\gamma_3}{\gamma_2}\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_3 l_3+\cdots\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.+\tanh^{-1}\left[\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_n l_n+\tanh^{-1}\left(-\frac{k_n}{\gamma_n\Delta_g}\right)\right]\right]\cdots\right]\right]\right]\right]\right\} \tag{8-42}$$

注意，如果令 $l_1=l,l_2=l_3=\cdots=l_n=0$，则式(8-41)可简化为

$$Y_0(r)|_{r=a}=-\frac{\gamma_1}{\omega\mu_0}\cdot\tanh\left[\mathrm{i}\gamma_1 l+\tanh^{-1}\left(-\frac{k_1}{\gamma_1\Delta_g}\right)\right] \tag{8-43}$$

由 $r=a$ 处的表面导纳

$$\frac{H_\theta^{(0)}}{E_\varphi^{(0)}}\bigg|_{z=a}=Y_0(r)|_{z=a}=Y_0(a) \tag{8-44}$$

再利用第 7 章或本章上一节相类似的方法，可得

$$\frac{W_2' \cdot \left(\frac{2}{k_0 a}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot k_0}{\mathrm{i}\omega\mu_0 \cdot W_2} = Y_0(a) \tag{8-45}$$

微分方程形式可表示为

$$W_2'(t_s') - q^h W_2(t_s') = 0 \tag{8-46}$$

式中：t_s' 是该微分方程的根；$W_2(t_s')$ 是二阶爱里函数

$$q^h = \frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{k_0} \cdot \left(\frac{k_0 a}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot Y_0(a) \tag{8-47}$$

采用第 7 章所述相类似的方法，容易导出覆盖有 n 层介质的球形地面上方$(a+z_s, 0, 0)$处的垂直磁偶极子在空气中激励的电磁场分量的 E_φ、H_r 和 H_θ 的解析表达式。

$$\begin{bmatrix} E_\varphi \\ \eta_0 H_r \\ \eta_0 H_\theta \end{bmatrix} = \frac{\omega\mu_0 I\mathrm{d}a}{\lambda a} \cdot \frac{\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0 a\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}} \cdot \sqrt{\pi x} \cdot \begin{bmatrix} \sum\limits_s \frac{G_s(z_s) \cdot G_s(z_r)}{t_s' - (q^h)^2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s' x} \\ \sum\limits_s \frac{G_s(z_s) \cdot G_s(z_r)}{t_s' - (q^h)^2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s' x} \\ \mathrm{i}\sum\limits_s \frac{G_s(z_s) \cdot \left.\frac{\partial G_s(z)}{k_0 \partial z}\right|_{z=z_r}}{t_s' - (q^h)^2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_s' x} \end{bmatrix} \tag{8-48}$$

其中，t_s' 是方程式(8-46)的根，它与传播模式相对应。z_s 表示源点的高度；z_r 表示场点的高度。由于源点和场点均接近空气和介质层的分界面，故条件 $z_s \ll a$ 和 $z_r \ll a$ 成立。归一化高度增益函数 $G_s(z)$可表示为

$$G_s(z) = \frac{W_2(t_s' - y)}{W_2(t_s')} \tag{8-49}$$

其中，式(8-49)中的 y 的表达式见式(8-34)。

8.3　水平电偶极子在覆盖多层介质的球形地面上激励的电磁场

基于前面两节给出的垂直电偶极子和垂直磁偶极子在空气中激励的电磁场分量的表达式，采用第 7 章所述相似的步骤，再利用互易定理，可得水平电偶极子激励的电磁场分量的表达式。

$$E_r^{HE}=-\frac{i\eta_0 Ids^{HE}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[i\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\cos\varphi\cdot\sum_s\frac{iF_s(z_r)\cdot\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_s}}{(t_s-q^2)\left[1+\frac{t_s}{2}\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}\cdot e^{it_s x}\tag{8-50}$$

$$H_r^{HE}=-\frac{iIds^{HE}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[i\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\sin\varphi\cdot\sum_s\frac{G_s(z_s)\cdot G_s(z_r)}{t_s'-(q^h)^2}\cdot e^{it_s' x}\tag{8-51}$$

$$H_\varphi^{HE}=-\frac{iIds^{HE}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[i\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\cos\varphi$$
$$\cdot\left[\sum_s\frac{iF_s(z_r)\cdot\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_s}}{t_s-q^2}\cdot e^{it_s x}+\frac{1}{k_0a\sin\theta}\cdot\sum_s\frac{\left.\frac{\partial G_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_r}\cdot G_s(z_s)}{t_s'-(q^h)^2}\cdot e^{it_s' x}\right]\tag{8-52}$$

$$H_\theta^{HE}=\frac{Ids^{HE}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[i\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\sin\varphi$$
$$\cdot\left[\frac{i}{k_0a\sin\theta}\sum_s\frac{F_s(z_r)\cdot\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_s}}{(t_s-q^2)\left[1+\frac{t_s}{2}\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}\cdot e^{it_s x}-\sum_s\frac{\left.\frac{\partial G_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_r}\cdot G_s(z_s)}{t_s'-(q^h)^2}\cdot e^{it_s' x}\right]\tag{8-53}$$

$$E_\theta^{HE}=\frac{\eta_0 Ids^{HE}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[i\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\cos\varphi$$
$$\cdot\left[-i\sum_s\frac{\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_r}\cdot\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_s}}{t_s-q^2}\cdot e^{it_s x}+\frac{1}{k_0a\sin\theta}\cdot\sum_s\frac{G_s(z_r)\cdot G_s(z_s)}{t_s'-(q^h)^2}\cdot e^{it_s' x}\right]\tag{8-54}$$

$$E_\varphi^{HE}=\frac{i\eta_0 Ids^{HE}}{\lambda a}\cdot\frac{\exp\left[i\left(k_0a\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\theta\sin\theta}}\cdot\sqrt{\pi x}\cdot\sin\varphi$$
$$\cdot\left[\frac{i}{k_0a\sin\theta}\sum_s\frac{\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_r}\cdot\left.\frac{\partial F_s(z)}{k_0\partial z}\right|_{z=z_s}}{(t_s-q^2)\left[1+\frac{t_s}{2}\left(\frac{2}{k_0a}\right)^{2/3}\right]}\cdot e^{it_s x}+\sum_s\frac{G_s(z_r)\cdot G_s(z_s)}{t_s'-(q^h)^2}\cdot e^{it_s' x}\right]\tag{8-55}$$

其中，式(8-50)至式(8-55)中的电磁场分量的上标 HE 表示水平电偶极子源激励的场。由上述公式可知，覆盖有 n 层介质的球形地面上方的水平电偶极子激励的电磁场分量也可以分解成电型波和磁型波。

8.4　空气层中场分量的计算结果及讨论

覆盖有 n 层介质的球形地面上方的偶极子激励的场分量的电磁特性与第 7 章所述的球形地面上覆盖一层介质的三层结构模型的电磁特性相似。为了阐述本章所求得的一般性解析表达式的实际意义，现假定覆盖的介质层是由厚度均为 $l/2$ 的两层球面分层介质所组成，从而对这种简单情况做一些必要的数值计算。

图 8-2 和图 8-3 所示分别为工作频率为 $f=100\text{kHz}$ 和 $f=200\text{kHz}$ 两种情况下单位垂直电偶极子激励的电场分量 $|E_r|$ 和磁场分量 $|H_\varphi|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线。其中，介质层的总厚度为 $l=120\text{m}$，即第一层介质和第二层介质的厚度均为 50m；地球半径取 $a=6370\text{km}$；上面一层介质（即区域 1）的电磁参数取为 $\varepsilon_{r1}=8$，$\sigma_1=10^{-5}\text{S/m}$；下面一层介质（即区域 2）的电磁参数取为 $\varepsilon_{r2}=12$，$\sigma_2=10^{-5}\text{S/m}$；地球（即区域 3）的电磁参数取为 $\varepsilon_{r3}=80$，$\sigma_3=4\text{S/m}$；源点和场点与位于空气层和上面一层介质的交界面上，即 $z_r=z_s=0\text{m}$。从图中可以看出，当球形地面覆盖一定厚度的介质层时会出现干涉现象。

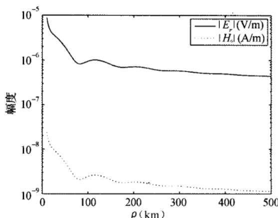


图 8-2　$f=100\text{kHz}$ 时，垂直电偶极子激励的 $|E_r|$ 和 $|H_\varphi|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线

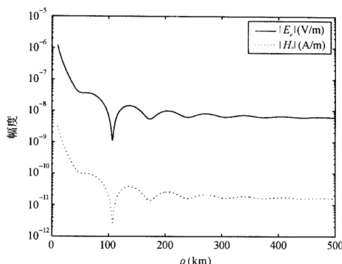


图 8-3　$f=200$kHz 时，垂直电偶极子激励的$|E_r|$和$|H_\varphi|$随传播距离ρ的变化关系曲线

图 8-4 和图 8-5 所示分别为工作频率为 $f=100$kHz 和 $f=200$kHz 两种情况下单位垂直磁偶极子激励的电场分量$|E_r|$和磁场分量$|H_\varphi|$随传播距离ρ的变化关系曲线。计算所用参数和本节中图 8-2 和图 8-3 的取值完全相同。从图 8-2 至图 8-5 可以看出，垂直电偶极子的激励效率远大于垂直磁偶极子。因此，在低频段，常用于沥青或水泥覆盖的平坦或球形地面的通信天线往往是垂直线天线，而不是垂直环天线。然而，在求解水平电偶极子激励的电磁场分量的解析表达式时，需要首先得到垂直磁偶极子激励的电磁场分量的解析表达式。

在低频段，水平线天线在覆盖有介质层的地面通信中也有着广泛的应用。图 8-6

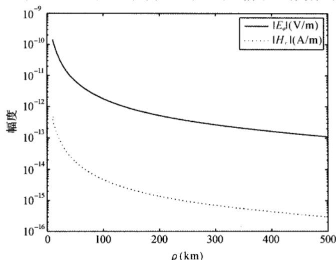


图 8-4　$f=100$kHz 时，垂直磁偶极子激励的$|E_\varphi|$和$|H_r|$随传播距离ρ的变化关系曲线

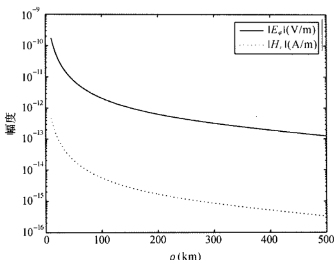


图 8-5　$f=200\text{kHz}$ 时，垂直磁偶极子激励的 $|E_\varphi|$ 和 $|H_r|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线

所示为单位水平电偶极子激励的电场分量 $|E_r|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线。图 8-7 所示为不同介质层厚度情况下单位水平电偶极子激励的电场分量 $|E_r|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线。图 8-8 所示为单位水平电偶极子激励的磁场分量 $|H_\varphi|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线。图 8-9 所示为不同介质层厚度情况下单位水平电偶极子激励的磁场分量 $|H_\varphi|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线。图 8-6 至图 8-9 计算所采用参数如下：$a=6370\text{km}$，$\varepsilon_{r1}=8$，$\varepsilon_{r2}=12$，$\varepsilon_{r3}=80$，$\sigma_1=\sigma_2=10^{-5}\text{S/m}$，$\sigma_3=4\text{S/m}$，$z_r=z_s=1\text{m}$，$\varphi=0°$。从图 8-6 至图 8-9 可以看出，远区场分量随频率和介质层的厚度变化而有较大的变化。由此可知，当球形地面覆盖一定厚度的介质层时会出现干涉现象。

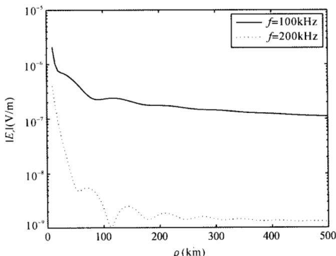


图 8-6　水平电偶极子激励的电场分量 $|E_r|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线：$l=120\text{m}$

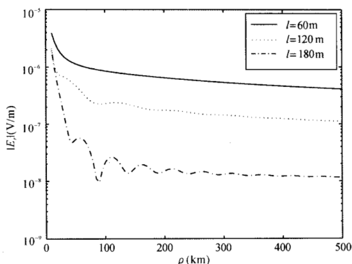


图 8-7 $f=100\text{kHz}$ 时，单位水平电偶极子激励的电场分量 $|E_r|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线

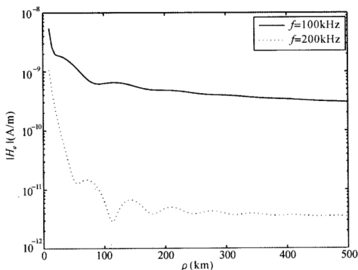


图 8-8 水平电偶极子激励的磁场分量 $|H_\varphi|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线：$l=120\text{m}$

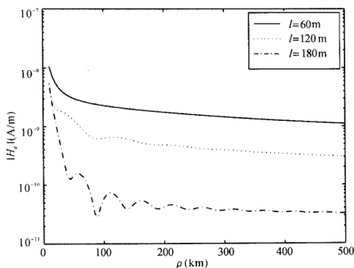


图 8-9　$f=100$kHz 时，单位水平电偶极子激励的磁场分量 $|H_\varphi|$ 随传播距离 ρ 的变化关系曲线

第9章 水平电偶极子在半空间激励的瞬态场的严格解

短脉冲可在时间上精确地分辨不同事物，并能借以传输大量信息，因而在雷达和通信技术有着重要的应用。另外，由闪电、电火花及核爆炸引起的电磁脉冲也会对电子设备产生干扰，而产生电磁脉冲的激励源往往处于距离地面很近的位置。因此，需要研究瞬态电磁场在半空间边界附近的激励及传播特性。

很多学者曾经对半空间边界附近的电偶极子源激励的瞬态场进行了深入的研究。其中，King 等人的专著[30]详细阐述了由 δ 源和高斯源激励的垂直电偶极子在半空间产生的瞬态场的严格解。而对于水平电偶极子的情况，数学推导将更加复杂，该专著中没有涉及。本章将给出由 δ 源和高斯源激励的单位水平电偶极子在半空间产生的瞬态电磁场的严格解[106][107]。

9.1 δ 源激励的水平电偶极子在半空间边界上产生的瞬态场

9.1.1 水平电偶极子在半空间边界上激励的频域场的积分表达式

本章所研究问题的物理模型如图 9-1 所示，其中 x 轴方向的单位水平电偶极子位于$(0,0,-d)$处。当偶极子源和场点从分界面的下方($d\to 0^+, z\to 0^-$)趋近边界时，电磁场六个分量的频域表达式可表示为

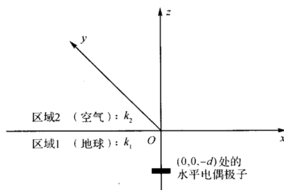


图 9-1　物理模型

$$\widetilde{E}_{2\rho}(\rho,\varphi;\omega)=\widetilde{E}_{1\rho}(\rho,\varphi;\omega)$$

$$=-\frac{\omega\mu_0}{4\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\sqrt{k_2^2-\lambda^2}}{k_2^2\sqrt{k_1^2-\lambda^2}+k_1^2\sqrt{k_2^2-\lambda^2}}\cdot[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{k_2^2-\lambda^2}+\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right\}\cos\varphi\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{9-1}$$

$$\widetilde{E}_{2\varphi}(\rho,\varphi;\omega)=\widetilde{E}_{1\varphi}(\rho,\varphi;\omega)$$

$$=\frac{\omega\mu_0}{4\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\sqrt{k_2^2-\lambda^2}}{k_2^2\sqrt{k_1^2-\lambda^2}+k_1^2\sqrt{k_2^2-\lambda^2}}\cdot[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{k_2^2-\lambda^2}+\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right\}\sin\varphi\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{9-2}$$

$$\widetilde{E}_{2z}(z,\varphi;\omega)=\frac{k_1^2}{k_2^2}\widetilde{E}_{1z}(\rho,\varphi;\omega)$$

$$=\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{4\pi k_2^2}\int_0^\infty\frac{k_2^2\sqrt{k_1^2-\lambda^2}-k_1^2\sqrt{k_2^2-\lambda^2}}{k_2^2\sqrt{k_1^2-\lambda^2}+k_1^2\sqrt{k_2^2-\lambda^2}}J_1(\lambda\rho)\cos\varphi\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{9-3}$$

$$\widetilde{B}_{2\rho}(\rho,\varphi;\omega)=\widetilde{B}_{1\rho}(\rho,\varphi;\omega)$$

$$=-\frac{\mu_0}{8\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{k_2^2\sqrt{k_1^2-\lambda^2}-k_1^2\sqrt{k_2^2-\lambda^2}}{k_2^2\sqrt{k_1^2-\lambda^2}+k_1^2\sqrt{k_2^2-\lambda^2}}\cdot[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{k_2^2-\lambda^2}-\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}{\sqrt{k_2^2-\lambda^2}+\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right\}\sin\varphi\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{9-4}$$

$$\widetilde{B}_{2\varphi}(\rho,\varphi;\omega)=\widetilde{B}_{1\varphi}(\rho,\varphi;\omega)$$

$$=-\frac{\mu_0}{8\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{k_2^2\sqrt{k_1^2-\lambda^2}-k_1^2\sqrt{k_2^2-\lambda^2}}{k_2^2\sqrt{k_1^2-\lambda^2}+k_1^2\sqrt{k_2^2-\lambda^2}}\cdot[J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)]\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{k_2^2-\lambda^2}-\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}{\sqrt{k_2^2-\lambda^2}+\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}[J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)]\right\}\cos\varphi\lambda\mathrm{d}\lambda \tag{9-5}$$

$$\widetilde{B}_{2z}(z,\varphi;\omega)=\widetilde{B}_{1z}(\rho,\varphi;\omega)$$
$$=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{k_2^2-\lambda^2}+\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}J_1(\lambda\rho)\sin\varphi\lambda^2\mathrm{d}\lambda \tag{9-6}$$

其中，k_1 和 k_2 分别表示区域 1 和区域 2 的波数；J_0、J_1 和 J_2 分别表示 0 阶、1 阶和 2 阶的贝塞尔函数。

为了数学推导方便，将式(9-1)至式(9-6)中的波数转换成用角频率 ω 表示，即 $k_1=\omega\varepsilon_1^{1/2}/c$，$k_2=\omega/c$，$\lambda'=c\lambda$，$\rho'=\rho/c$ 及 $\varepsilon=\varepsilon_1/\varepsilon_0$，其中，$c=(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$ 为光速。利用下面的关系式：

$$J_0(\lambda\rho)+J_2(\lambda\rho)=\frac{2}{\lambda\rho}J_1(\lambda\rho) \tag{9-7}$$

$$J_0(\lambda\rho)-J_2(\lambda\rho)=2J_0(\lambda\rho)-\frac{2}{\lambda\rho}J_1(\lambda\rho) \tag{9-8}$$

则可得如下六个场分量的积分表达式：

$$\widetilde{E}_{2\rho}(\rho',0;\omega)=\widetilde{E}_{1\rho}(\rho',0;\omega)$$
$$=-\frac{\omega\mu_0}{2\pi c}\int_0^\infty\left\{\frac{\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}{\omega^2\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}+\omega^2\varepsilon\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}\cdot\left[J_0(\lambda'\rho')-\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}+\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}}\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\right\}\lambda'\mathrm{d}\lambda' \tag{9-9}$$

$$\widetilde{E}_{2\varphi}(\rho',\frac{\pi}{2};\omega)=\widetilde{E}_{1\varphi}(\rho',\frac{\pi}{2};\omega)$$
$$=\frac{\omega\mu_0}{2\pi c}\int_0^\infty\left\{\frac{\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}{\omega^2\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}+\omega^2\varepsilon\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}+\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}}\left[J_0(\lambda'\rho')-\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\right]\right\}\lambda'\mathrm{d}\lambda' \tag{9-10}$$

$$\widetilde{E}_{2z}(\rho',0;\omega)=\varepsilon\widetilde{E}_{1z}(\rho',0;\omega)$$
$$=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{4\pi\omega c}\int_0^\infty\frac{\omega^2\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}-\omega^2\varepsilon\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}{\omega^2\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}+\omega^2\varepsilon\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}J_1(\lambda'\rho')\lambda'^2\mathrm{d}\lambda' \tag{9-11}$$

$$\widetilde{B}_{2\rho}(\rho',\frac{\pi}{2};\omega)=\widetilde{B}_{1\rho}(\rho',\frac{\pi}{2};\omega)$$
$$=-\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\int_0^\infty\left\{\frac{\omega^2\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}-\omega^2\varepsilon\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}{\omega^2\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}+\omega^2\varepsilon\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}-\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}}{\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}+\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}}\left[J_0(\lambda'\rho')-\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\right]\right\}\lambda'\mathrm{d}\lambda' \tag{9-12}$$

$$\widetilde{B}_{2\varphi}(\rho',0;\omega)=\widetilde{B}_{1\varphi}(\rho',0;\omega)$$
$$=-\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\int_0^\infty\left\{\frac{\omega^2\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}-\omega^2\varepsilon\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}{\omega^2\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}+\omega^2\varepsilon\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}\right.$$

$$\times\left[J_0(\lambda'\rho')-\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\right]$$

$$+\frac{\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}-\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}}{\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}+\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}}\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\Big\}\lambda'\mathrm{d}\lambda' \tag{9-13}$$

$$\widetilde{B}_{2z}\left(\rho',\frac{\pi}{2};\omega\right)=\widetilde{B}_{1z}\left(\rho',\frac{\pi}{2};\omega\right)$$

$$=\frac{\mathrm{i}\mu_0}{2\pi c^2}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}+\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}}J_1(\lambda'\rho')\lambda'^2\mathrm{d}\lambda' \tag{9-14}$$

9.1.2 瞬态场分量 $E_{2\rho}$的严格解

1. 瞬态场分量 $E_{2\rho}$的积分表达式

如果水平偶极子是由 δ 源激励，时域场分量 $E_{2\rho}$可以通过傅里叶变换得到：

$$E_{2\rho}(\rho',0;t)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\widetilde{E}_{2\rho}(\rho',0;\omega)\mathrm{d}\omega \tag{9-15}$$

将式(9-9)代入式(9-15)，可得

$$E_{2\rho}(\rho',0;t)=-\frac{\mu_0}{2\pi^2c}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\times\mathrm{Re}\int_0^\infty\left\{\frac{\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}{\omega^2\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}+\omega^2\varepsilon\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}\cdot\left[J_0(\lambda'\rho')-\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}+\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\right\}\lambda'\mathrm{d}\lambda' \tag{9-16}$$

作变量代换 $\lambda'=\omega\xi$，$\mathrm{d}\lambda'=\omega\mathrm{d}\xi$，则式(9-16)可改写为

$$E_{2\rho}(\rho',0;t)=\frac{\mu_0}{2\pi^2c}\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty\frac{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\varepsilon\sqrt{1-\xi^2}}\right.$$

$$\times\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}J_0(\omega\xi\rho')\mathrm{d}\omega+\frac{\mathrm{i}}{\xi\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}J_1(\omega\xi\rho')\mathrm{d}\omega\right]$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\mathrm{i}}{\xi\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}J_1(\omega\xi\rho')\mathrm{d}\omega\right\}\xi\mathrm{d}\xi \tag{9-17}$$

式(9-17)中与 ω 相关的积分可以在积分表上直接查出。由数学积分表[120]中的式(6.611-1)可以知道，当 $t>\xi\rho'$时，有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}J_0(\omega\xi\rho')\mathrm{d}\omega=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{t^2-\xi^2\rho'^2}} \tag{9-18}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}J_1(\omega\xi\rho')\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\xi\rho'}\left[1-\frac{t}{\sqrt{t^2-\xi^2\rho'^2}}\right] \tag{9-19}$$

因此，式(9-17)可以写成

$$E_{2\rho}(\rho',0;t)=\frac{\mu_0}{2\pi^2\rho'c}(I_1+I_2+I_3) \tag{9-20}$$

其中

$$I_1=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\varepsilon\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{\sqrt{t^2/\rho'^2-\xi^2}}\xi d\xi \tag{9-21}$$

$$I_2=\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\varepsilon\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{\xi^2\rho'}\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-\xi^2\rho'^2}}\right)\xi d\xi \tag{9-22}$$

$$I_3=\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{\xi^2\rho'}\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-\xi^2\rho'^2}}\right)\xi d\xi \tag{9-23}$$

显然，需要逐个估算上面三个积分式。

2. 积分 I_1 的计算

由如图 9-2 所示的割缝结构和图 9-3 所示的积分围道，可得

$$I_1=0,\quad \frac{t}{\rho'}<1 \tag{9-24}$$

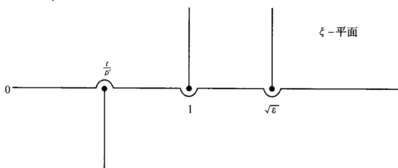


图 9-2　式(9-21)至式(9-23)中积分的割缝结构示意图

当 $1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}$ 时，积分 I_1 可表示为

$$\begin{aligned}I_1=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Im}\Bigg\{&\int_0^1\Bigg[\frac{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\sqrt{1-\xi^2}}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\varepsilon\sqrt{1-\xi^2})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\\&-\frac{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\sqrt{1-\xi^2}}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\varepsilon\sqrt{1-\xi^2})(-\sqrt{t^2/\rho'^2-\xi^2})}\Bigg]\xi d\xi\\&+\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\Bigg[\frac{\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\sqrt{\xi^2-1}}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{\xi^2-1})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\\&-\frac{\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\sqrt{\xi^2-1}}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{\xi^2-1})\left(-\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}\right)}\Bigg]\xi d\xi\Bigg\}\end{aligned} \tag{9-25}$$

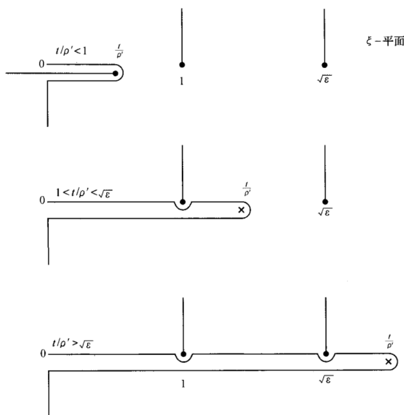


图 9-3　式(9-21)至式(9-23)中积分的围道示意图

式中：第一个积分项是实数，对虚部没有任何贡献，于是式(9-25)可重新写成

$$I_1=\frac{\partial}{\partial t^2}\mathrm{Im}\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{\mathrm{i}2\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\sqrt{\xi^2-1}}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{\xi^2-1})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi \tag{9-26}$$

由于式(9-26)中实部对积分没有贡献，且实部和虚部能够很容易被分开，因此式(9-26)可进一步简化为

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{2(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{(\varepsilon-1)[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi\\&=\frac{2}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{-\sqrt{\xi^2-1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi^3\mathrm{d}\xi\\&\quad+\frac{2\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{9-27}$$

作变量代换 $\zeta=\xi^2$，$\mathrm{d}\zeta=2\xi\mathrm{d}\xi$ 后，式(9-27)可表示为

$$I_1=\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\zeta\mathrm{d}\zeta+\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\mathrm{d}\zeta \tag{9-28}$$

由此可知,需要求解下面两个积分:

$$\nu_0^{(1)}=\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\zeta\mathrm{d}\zeta \tag{9-29}$$

$$\nu_0^{(2)}=\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\mathrm{d}\zeta \tag{9-30}$$

以上两个积分已经求解出来[30][62],结果如下:

$$\nu_0^{(1)}=-\frac{\pi}{2(\varepsilon+1)}\left[\frac{t^2}{\rho'^2}-1+\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}-\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{9-31}$$

$$\nu_0^{(2)}=\frac{\pi}{\varepsilon+1}\left[1-\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{9-32}$$

因此,可得

$$I_1=-\frac{\pi}{2(\varepsilon^2-1)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{t^2}{\rho'^2}-1-\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon+1}+\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon+1}\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\qquad 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon} \tag{9-33}$$

当$\frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}$时,积分 I_1 可表示为

$$I_1=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Im}\left\{\int_1^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{2\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\,\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1}}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{\xi^2-1})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\frac{t}{\rho'}}\frac{\mathrm{i}2\sqrt{\xi^2-\varepsilon}\sqrt{\xi^2-1}}{(\sqrt{\xi^2-\varepsilon}+\varepsilon\sqrt{\xi^2-1})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi\right\} \tag{9-34}$$

即

$$I_1=\frac{2}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\int_1^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\frac{t}{\rho'}}\frac{\varepsilon(\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-\varepsilon}-(\xi^2-\varepsilon)\sqrt{\xi^2-1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi\right\}$$

$$= \frac{2}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi d\xi\right.$$

$$\left.+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\frac{t}{\rho'}}\frac{\varepsilon(\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-\varepsilon}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi d\xi\right\} \tag{9-35}$$

同样，作变量代换 $\zeta=\xi^2, d\zeta=2\xi d\xi$，则

$$I_1 = \frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{(\varepsilon-\zeta)\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{t^2/\rho'^2-\zeta}}d\zeta\right.$$

$$\left.+\int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\varepsilon(\zeta-1)\sqrt{\zeta-\varepsilon}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{t^2/\rho'^2-\zeta}}d\zeta\right\}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\zeta d\zeta$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}d\zeta$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-\varepsilon}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\zeta d\zeta$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-\varepsilon}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}d\zeta \tag{9-36}$$

式(9-36)中的前两个积分的估算结果见式(9-31)和式(9-32)。接下来，需要求解第三和第四个积分：

$$\nu_\varepsilon^{(1)} = \int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-\varepsilon}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\zeta d\zeta \tag{9-37}$$

$$\nu_\varepsilon^{(2)} = \int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-\varepsilon}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}d\zeta \tag{9-38}$$

积分式(9-37)和式(9-38)也已经被求解出来[30][62]，结果如下：

$$\nu_\varepsilon^{(1)}=\frac{\pi}{2(\varepsilon+1)}\left[\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon+\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}-\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon+1}\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{9-39}$$

$$\nu_\varepsilon^{(2)}=-\frac{\pi}{\varepsilon+1}\left[1-\varepsilon\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{9-40}$$

将式(9-31)、式(9-32)、式(9-39)和式(9-40)代入式(9-36)，可得

$$I_1=\frac{\pi}{2(\varepsilon+1)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t^2}{\rho'^2}-\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon+1}\right),\quad \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon} \tag{9-41}$$

然后，可将积分 I_1 的解表示为

$$I_1=\frac{\pi}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_1\left(\frac{t}{\rho'}\right) \tag{9-42}$$

其中

$$f_1\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\begin{cases}0, & \frac{t}{\rho'}<1\\ -\frac{1}{\varepsilon^2-1}\left[\frac{t^2}{\rho'^2}-1-\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon+1}+\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon+1}\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right], & 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}\\ \frac{1}{\varepsilon+1}\left(\frac{t^2}{\rho'^2}-\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon+1}\right), & \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases} \tag{9-43}$$

由于 $f_1(1-)=f_1(1+)=0$，$f_1(\sqrt{\varepsilon}-)=f_1(\sqrt{\varepsilon}+)=\frac{\varepsilon-1}{(\varepsilon+1)^2}$，可知 $f_1\left(\frac{t}{\rho'}\right)$ 在任意一点上都是连续的。

$$f_1'\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\begin{cases}0, & \frac{t}{\rho'}<1\\ -\frac{1}{\varepsilon^2-1}\frac{2t}{\rho'^2}\left[1-\varepsilon^2\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)^{-\frac{3}{2}}\right], & 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}\\ \frac{1}{\varepsilon+1}\frac{2t}{\rho'^2}, & \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases} \tag{9-44}$$

由于 $f_1'(1-)=0$，$f_1'(1+)=\frac{2}{\rho'}$，$f_1'\left(\frac{t}{\rho'}\right)$ 在 $\frac{t}{\rho'}=1$ 处存在一个跃变，其大小为 $\frac{2}{\rho'}$。同样，$f_1'(\sqrt{\varepsilon}-)=\frac{-2}{\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon+1)\rho'}$，$f_1'(\sqrt{\varepsilon}+)=\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{(\varepsilon+1)\rho'}$，$f_1'(t/\rho')$ 在 $t/\rho'=\sqrt{\varepsilon}$ 处存在一个跃变，其大小为 $\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}\rho'}$。因此

$$f_1''\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\begin{cases}0, & \frac{t}{\rho'}<1\\ -\frac{2}{(\varepsilon^2-1)\rho'^2}\left[1+\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+1)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{2t^2}{\rho'^2}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)\left(\frac{2t^2}{\rho'^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{-\frac{5}{2}}\right], & 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}\\ \frac{2}{(\varepsilon+1)\rho'^2}, & \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases} \tag{9-45}$$

最后，容易得到积分 I_1 的严格解，可表示为

$$I_1=\frac{c\pi}{\rho}\left[\delta\left(t-\frac{\rho}{c}\right)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon}\rho}{c}\right)\right]$$

$$
+\frac{c^2\pi}{(\varepsilon^2-1)\rho^2}\begin{cases} 0, & \frac{ct}{\rho}<1 \\ -\left[1+\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+1)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{2c^2t^2}{\rho^2}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)\left(\frac{c^2t^2}{\rho^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{-\frac{5}{2}}\right], & 1<\frac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon} \\ \varepsilon-1, & \frac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon} \end{cases} \tag{9-46}
$$

3. 积分 I_2 的计算

应用上一节估算积分 I_1 相似的方法，同样能够得到积分 I_2 的严格解：

$$
I_2=0,\quad \frac{t}{\rho'}<1 \tag{9-47}
$$

当 $1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}$ 时，积分 I_2 可表示为

$$
\begin{aligned}
I_2 = &-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty\left[\frac{\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{\xi^2-1}}\right.\right. \\
&\left.\left.-\frac{t}{\rho'}\frac{\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\sqrt{\xi^2-1}}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{\xi^2-1})\left(\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}\right)}\right]\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2\rho'}\right\}
\end{aligned} \tag{9-48}
$$

容易将式(9-48)中的实部和虚部分开，同时考虑到实部对积分没有任何贡献，因此式(9-48)可写成

$$
\begin{aligned}
I_2 = &-\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^\infty\frac{(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right. \\
&\left.-\frac{t}{\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty\frac{(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right\}
\end{aligned} \tag{9-49}
$$

对如图 9-3 所示的围道进行积分后，式(9-49)可表示为

$$
\begin{aligned}
I_2 = &-\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right. \\
&-\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2} \\
&-\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2} \\
&\left.+\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\left(-\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}\right)}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\frac{\xi d\xi}{\xi^2}\right\} \tag{9-50}$$

作变量代换 $\zeta=\xi^2, d\zeta=2\xi d\xi$ 后，式(9-50)可表示为

$$I_2 = \frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{(\varepsilon-\zeta)\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}$$

$$+ \frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}d\zeta\right\} \tag{9-51}$$

由此可知，需要求解下面两个积分。

$$\nu_0^{(3)} = \int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{9-52}$$

$$\nu_0^{(4)} = -\nu_0^{(2)} = \int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}d\zeta \tag{9-53}$$

其中，第二个积分式(9-53)可直接由式(9-32)得到，接下来需要求解第一个积分。令 $x'=\xi-1, T_0=\frac{t^2}{\rho'^2}-1$ 及 $E_0=\frac{1}{\varepsilon+1}$，则式(9-52)改写为

$$\nu_0^{(3)} = \int_0^{T_0}\frac{x'dx'}{(x'+1)[(\varepsilon+1)x'+1]\sqrt{(T_0-x')x'}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon+1}\int_0^{T_0}\frac{x'dx}{(x'+1)(x'+E_0)\sqrt{(T_0-x')x'}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon+1}\frac{1}{1-E_0}\int_0^{T_0}\left(\frac{1}{x'+E_0}-\frac{1}{x'+1}\right)\frac{x'dx'}{\sqrt{(T_0-x')x'}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left\{\int_0^{T_0}\frac{x'dx'}{(x'+E_0)\sqrt{(T_0-x')x'}} - \int_0^{T_0}\frac{x'dx'}{(x'+1)\sqrt{(T_0-x')x'}}\right\} \tag{9-54}$$

令 $x=x'+E_0$ 及 $X_1=(T_0+E_0-x)(x-E_0)$，则式(9-54)中的第一个积分可精确地求解为

$$\int_0^{T_0}\frac{x'dx'}{(x'+E_0)\sqrt{(T_0-x')x'}} = \int_{E_0}^{T_0+E_0}\frac{(x-E_0)dx}{x\sqrt{(T_0+E_0-x)(x-E_0)}}$$

$$= \int_{E_0}^{T_0+E_0}\frac{dx}{X_1^{\frac{1}{2}}} - E_0\int_{E_0}^{T_0+E_0}\frac{dx}{xX_1^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \pi\left[1 - \left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2} - \varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{9-55}$$

同样，令 $x = x' + 1$ 及 $X_2 = (T_0 + 1 - x)(x - 1)$，则式(9-54)中的第二个积分为

$$\int_0^{T_0} \frac{x'\mathrm{d}x'}{(x'+1)\sqrt{(T_0 - x')x'}} = \int_1^{T_0+1} \frac{(x-1)\mathrm{d}x}{x\sqrt{(T_0+1-x)(x-1)}}$$

$$= \int_1^{T_0+1} \frac{\mathrm{d}x}{X_2^{\frac{1}{2}}} - \int_1^{T_0+1} \frac{\mathrm{d}x}{xX_2^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \pi\left[1 - \left(\frac{t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{9-56}$$

于是

$$\nu_0^{(3)} = \frac{\pi}{\varepsilon}\left[\left(\frac{t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2} - \varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{9-57}$$

因此，可得

$$I_2 = \frac{\pi}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\left[-\frac{1}{\varepsilon+1} + \left(\frac{t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2} - \varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\},$$

$$1 < \frac{t}{\rho'} < \sqrt{\varepsilon} \tag{9-58}$$

当 $\frac{t}{\rho'} > \sqrt{\varepsilon}$ 时，积分 I_2 可表示为

$$\begin{aligned} I_2 = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\Bigg\{ & \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon - \xi^2}\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{\varepsilon - \xi^2} + \mathrm{i}\varepsilon\sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2\rho'} \\ & - \frac{t}{\rho'}\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon - \xi^2}\sqrt{\xi^2 - 1}}{(\sqrt{\varepsilon - \xi^2} + \mathrm{i}\varepsilon\sqrt{\xi^2 - 1})\sqrt{t^2/\rho'^2 - \xi^2}} \frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2\rho'} \\ & + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\sqrt{\xi^2 - \varepsilon}\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{\xi^2 - \varepsilon} + \varepsilon\sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2\rho'} \\ & - \frac{t}{\rho'}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\sqrt{\xi^2 - \varepsilon}\sqrt{\xi^2 - 1}}{(\sqrt{\xi^2 - \varepsilon} + \varepsilon\sqrt{\xi^2 - 1})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2} - \xi^2}} \frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2\rho'}\Bigg\} \end{aligned} \tag{9-59}$$

其虚部可表示为

$$\begin{aligned} I_2 = -\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\Bigg\{ & \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(\varepsilon - \xi^2)\sqrt{\xi^2 - 1}}{(\varepsilon+1)\xi^2 - \varepsilon} \frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2} \\ & - \frac{t}{\rho'}\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(\varepsilon - \xi^2)\sqrt{\xi^2 - 1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2 - \varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2} - \xi^2}} \frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2} \end{aligned}$$

$$+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty}\frac{\varepsilon(\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-\varepsilon}-(\xi^2-\varepsilon)\sqrt{\xi^2-1}}{(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}$$

$$\left.-\frac{t}{\rho'}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty}\frac{\varepsilon(\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-\varepsilon}-(\xi^2-\varepsilon)\sqrt{\xi^2-1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{\infty}\frac{(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right.$$

$$-\frac{t}{\rho'}\int_0^{\infty}\frac{(\varepsilon-\xi^2)\sqrt{\xi^2-1}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}$$

$$+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty}\frac{\varepsilon(\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-\varepsilon}}{(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}$$

$$\left.-\frac{t}{\rho'}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty}\frac{\varepsilon(\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-\varepsilon}}{[(\varepsilon+1)\xi^2-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right\} \tag{9-60}$$

作变量代换 $\zeta=\xi^2$，$\mathrm{d}\zeta=2\xi\mathrm{d}\xi$ 后，式(9-60)可表示为

$$I_2=\frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{t^2/\rho'^2-\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\right\}$$

$$+\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-1}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{t^2/\rho'^2-\zeta}}\mathrm{d}\zeta\right\}$$

$$+\frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_{\varepsilon}^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-\varepsilon}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{t^2/\rho'^2-\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\right\}$$

$$+\frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_{\varepsilon}^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-\varepsilon}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{t^2/\rho'^2-\zeta}}\mathrm{d}\zeta\right\} \tag{9-61}$$

式(9-61)中的前两个积分的严格解见式(9-57)和式(9-53)。接下来，需要求解第三个和第四个积分，即

$$\nu_{\varepsilon}^{(3)}=\int_{\varepsilon}^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-\varepsilon}}{[(\varepsilon+1)\zeta-\varepsilon]\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \tag{9-62}$$

$$\nu_{\varepsilon}^{(4)}=-\nu_{\varepsilon}^{(2)} \tag{9-63}$$

令 $x'=\zeta-\varepsilon$，$T_{\varepsilon}=\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon$ 及 $E_{\varepsilon}=\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon+1}$，则式(9-62)可以写成

$$\nu_{\varepsilon}^{(3)}=-\int_0^{T_{\varepsilon}}\frac{x'\mathrm{d}x'}{(x'+\varepsilon)[(\varepsilon+1)x'+\varepsilon^2]\sqrt{(T_{\varepsilon}-x')x'}}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon+1}\int_0^{T_{\varepsilon}}\frac{x'\mathrm{d}x'}{(x'+\varepsilon)(x'+E_{\varepsilon})\sqrt{(T_{\varepsilon}-x')x'}}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon+1}\frac{1}{\varepsilon-E_\varepsilon}\int_0^{T_\varepsilon}\left(\frac{1}{x'+E_\varepsilon}-\frac{1}{x'+\varepsilon}\right)\frac{x'\mathrm{d}x'}{\sqrt{(T_\varepsilon-x')x'}}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\left\{\int_0^{T_\varepsilon}\frac{x'\mathrm{d}x'}{(x'+E_\varepsilon)\sqrt{(T_\varepsilon-x')x'}}-\int_0^{T_\varepsilon}\frac{x'\mathrm{d}x'}{(x'+\varepsilon)\sqrt{(T_\varepsilon-x')x'}}\right\} \tag{9-64}$$

令 $x=x'+E_\varepsilon$ 及 $Y_1=(T_\varepsilon+E_\varepsilon-x)(x-E_\varepsilon)$，则可得

$$\int_0^{T_\varepsilon}\frac{x'\mathrm{d}x'}{(x'+E_\varepsilon)\sqrt{(T_\varepsilon-x')x'}}=\int_{E_\varepsilon}^{T_\varepsilon+E_\varepsilon}\frac{(x-E_\varepsilon)\mathrm{d}x}{x\sqrt{(T_\varepsilon+E_\varepsilon-x)(x-E_\varepsilon)}}$$

$$=\int_{E_\varepsilon}^{T_\varepsilon+E_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{Y_1^{\frac{1}{2}}}-E_\varepsilon\int_{E_\varepsilon}^{T_\varepsilon+E_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{xY_1^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\pi\left[1-\varepsilon\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{9-65}$$

同样，令 $x=x'+\varepsilon$ 及 $Y_2=(T_\varepsilon+\varepsilon-x)(x-\varepsilon)$，则可得

$$\int_0^{T_\varepsilon}\frac{x'\mathrm{d}x'}{(x'+\varepsilon)\sqrt{(T_\varepsilon-x')x'}}=\int_\varepsilon^{T_\varepsilon+\varepsilon}\frac{(x-\varepsilon)\mathrm{d}x}{x\sqrt{(T_\varepsilon+\varepsilon-x)(x-\varepsilon)}}$$

$$=\int_\varepsilon^{T_\varepsilon+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{Y_2^{\frac{1}{2}}}-\varepsilon\int_\varepsilon^{T_\varepsilon+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{xY_2^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\pi\left[1-\varepsilon\left(\frac{\varepsilon t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{9-66}$$

将式(9-65)和式(9-66)代入式(9-64)，可得

$$\nu_\varepsilon^{(3)}=\pi\left[-\left(\frac{\varepsilon t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{9-67}$$

因此

$$I_2=\frac{\pi}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\left[\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}+(1-\sqrt{\varepsilon})\left(\frac{t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\},\quad \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon} \tag{9-68}$$

综合式(9-47)、式(9-58)和式(9-68)，可得

$$I_2=\frac{\pi}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}f_2\left(\frac{t}{\rho'}\right) \tag{9-69}$$

其中

$$f_2\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\begin{cases}0, & \frac{t}{\rho'}<1\\ \frac{t}{\rho'}\left[-\frac{1}{\varepsilon+1}+\left(\frac{t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right], & 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}\\ \frac{t}{\rho'}\left[\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}+(1-\sqrt{\varepsilon})\left(\frac{t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right], & \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases} \tag{9-70}$$

由于 $f_2(1-)=f_2(1+)=0$，$f_2(\sqrt{\varepsilon}-)=f_2(\sqrt{\varepsilon}+)=\sqrt{\varepsilon}\left(-\frac{2}{\varepsilon+1}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$，因此，

$f_2(\frac{t}{\rho'})$在$\frac{t}{\rho'}=1$和$\frac{t}{\rho'}=\sqrt{\varepsilon}$处是连续的。

$$f_2'\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\begin{cases}0, & \frac{t}{\rho'}<1\\ \frac{1}{\rho'}\left[-\frac{1}{\varepsilon+1}+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon+1}\left((\varepsilon+1)\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)^{-\frac{3}{2}}\right], & 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}\\ \frac{1}{\rho'}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}, & \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases} \tag{9-71}$$

最后，容易得到积分 I_2 的严格解，可表示为

$$I_2=\frac{c^2\pi}{(\varepsilon^2-1)\rho^2}\begin{cases}0 & \frac{ct}{\rho}<1\\ -1+\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+1)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{c^2t^2}{\rho^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{-\frac{3}{2}} & 1<\frac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon}\\ \varepsilon-1 & \frac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases} \tag{9-72}$$

4. 积分 I_3 的计算

采用前两节估算积分 I_1 和 I_2 相似的步骤，同样能够得到积分 I_3 的严格解。当 $\frac{t'}{\rho}<1$ 时，

$$I_3=0 \tag{9-73}$$

当 $1<t/\rho'<\sqrt{\varepsilon}$时，

$$I_3=\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{t}{\rho'}\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1})\left(\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon^2}\right)}\right]\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2\rho'}\right\} \tag{9-74}$$

容易将式(9-74)中的实部和虚部分开，并且只保留了虚部，I_3 可表示为

$$I_3=-\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^\infty\sqrt{\xi^2-1}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}-\frac{t}{\rho'}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right\} \tag{9-75}$$

对图 9-3 所示的围道进行积分后，可得

$$I_3=-\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\sqrt{\xi^2-1}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}-\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right.$$
$$\left.-\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\sqrt{\xi^2-1}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}+\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{-\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right\}$$

$$= \frac{2}{(\varepsilon-1)\rho'} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t}{\rho'}} \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}} \frac{\xi \mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right\} \tag{9-76}$$

作变量代换 $\zeta=\xi^2$ 后，式(9-76)可表示为

$$I_3 = \frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}} \frac{\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\right\} \tag{9-77}$$

由此可知，式(9-77)中的积分可直接求解，可得

$$\begin{aligned} \nu_0^{(5)} &= \int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}} \frac{\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \\ &= \int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta)(\zeta-1)}} - \int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta\sqrt{(\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta)(\zeta-1)}} \\ &= \pi\left[1-\left(\frac{t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \end{aligned} \tag{9-78}$$

当 $\frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}$ 时，则

$$\begin{aligned} I_3 = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\Bigg\{ &\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1}} \frac{\xi \mathrm{d}\xi}{\xi^2\rho'^2} \\ &- \frac{t}{\rho'}\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}} \frac{\xi \mathrm{d}\xi}{\xi^2\rho'^2} \\ &+ \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-\varepsilon}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1}} \frac{\xi \mathrm{d}\xi}{\xi^2\rho'^2} \\ &- \frac{t}{\rho'}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{1}{(\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-\varepsilon}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}} \frac{\xi \mathrm{d}\xi}{\xi^2\rho'^2}\Bigg\} \end{aligned} \tag{9-79}$$

式(9-79)可以表示为

$$\begin{aligned} I_3 = -\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'^2} \frac{\partial}{\partial t}\Bigg\{ &\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\xi^2-1}\frac{\xi \mathrm{d}\xi}{\xi^2} - \frac{t}{\rho'}\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}} \frac{\xi \mathrm{d}\xi}{\xi^2} \\ &+ \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} (\sqrt{\xi^2-1}-\sqrt{\xi^2-\varepsilon})\frac{\xi \mathrm{d}\xi}{\xi^2} \\ &- \frac{t}{\rho'}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\sqrt{\xi^2-1}-\sqrt{\xi^2-\varepsilon}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}} \frac{\xi \mathrm{d}\xi}{\xi^2}\Bigg\} \end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^\infty\sqrt{\xi^2-1}\,\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}-\frac{t}{\rho'}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right.$$

$$\left.-\int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty\sqrt{\xi^2-\varepsilon}\,\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}+\frac{t}{\rho'}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty\frac{\sqrt{\xi^2-\varepsilon}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\right\}\tag{9-80}$$

作变量代换 $\zeta=\xi^2,\mathrm{d}\zeta=2\xi\mathrm{d}\xi$ 后，可得

$$I_3=\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\right\}$$

$$+\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{\rho'}\int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\right\}\tag{9-81}$$

式(9-81)中的第一个积分的严格解见式(9-78)，而第二个积分是需要求解的，具体如下：

$$\nu_\varepsilon^{(5)}=\int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{-\sqrt{\zeta-\varepsilon}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

$$=-\int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\zeta-\varepsilon}{\sqrt{(\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta)(\zeta-\varepsilon)}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

$$=-\int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta)(\zeta-\varepsilon)}}+\varepsilon\int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta\sqrt{(\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta)(\zeta-\varepsilon)}}$$

$$=-\pi\left[1-\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\tag{9-82}$$

将式(9-78)和式(9-82)代入式(9-81)中，可得

$$I_3=\frac{\pi}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{\rho'}(\sqrt{\varepsilon}-1)\left(\frac{t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right],\quad\frac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\tag{9-83}$$

因此

$$I_3=\frac{\pi}{(\varepsilon-1)\rho'}\frac{\partial}{\partial t}f_3\left(\frac{t}{\rho'}\right)\tag{9-84}$$

其中

$$f_3\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\frac{t}{\rho'}\begin{cases}0, & \frac{ct}{\rho}<1\\ \left[1-\left(\frac{t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right], & 1<\frac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon}\\ (\sqrt{\varepsilon}-1)\left(\frac{t^2}{\rho'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, & \frac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\tag{9-85}$$

由于 $f_3(1-)=f_3(1+)=0, f_3(\sqrt{\varepsilon}-)=f_3(\sqrt{\varepsilon}+)=\sqrt{\varepsilon}-1$，因此，$f_3(\frac{t}{\rho'})$在$\frac{t}{\rho'}=1$和$\frac{t}{\rho'}=\sqrt{\varepsilon}$处是连续的。

$$f_3'\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\begin{cases}0, & \frac{ct}{\rho}<1\\ \frac{1}{\rho'}, & 1<\frac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon}\\ 0, & \frac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\tag{9-86}$$

最后，容易得到积分 I_3 的严格解，可表示为

$$I_3=\frac{c^2\pi}{(\varepsilon-1)\rho^2}\begin{cases}0 & \frac{ct}{\rho}<1\\ 1 & 1<\frac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon}\\ 0 & \frac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\tag{9-87}$$

5. 场分量 $E_{2\rho}$的严格解

将式(9-46)、式(9-72)和式(9-87)代入式(9-20)，容易得到电场分量 $E_{2\rho}(\rho,0;t)$的严格解，可表示为

$$E_{2\rho}(\rho,0;t)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c\rho^2}\left[\delta\left(t-\frac{\rho}{c}\right)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon}\rho}{c}\right)\right]+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)\rho^3}$$
$$\times\begin{cases}0, & \frac{ct}{\rho}<1\\ 1-\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+1)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{c^2t^2}{\rho^2}+\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)\left(\frac{c^2t^2}{\rho^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{-\frac{5}{2}}, & 1<\frac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon}\\ 2, & \frac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\tag{9-88}$$

从式(9-88)可以看出，包含 δ 函数的脉冲波的幅度包括因子 $1/\rho^2$。因此，可以得出结论：当水平偶极子放置在边界面上时，沿边界的远区脉冲场以 $1/\rho^2$ 的规律衰减，这正是侧面脉冲波的传播特性。

假设偶极子源位于区域 1(介质)一侧的边界上，那么在 $t=\rho/c$ 时刻之前，任何时

刻任意距离的场分量 $E_{2\rho}(\rho,0;t)$ 都为零；在 $t=\rho/c$ 时刻，电场分量 $E_{2\rho}(\rho,0;t)$ 的幅度即刻增长为无限大，然后马上减小至以下的特定值：

$$E_{2\rho}(\rho,0;t)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\rho^3}\frac{3\varepsilon^3+\varepsilon^2-\varepsilon+1}{\varepsilon^2-1} \tag{9-89}$$

在区域 2(空气)中沿着边界以速度 c 传播的第一个脉冲到达的时刻为 $t=\rho/c$；然后，场分量的幅度随时间以

$$E_{2\rho}(\rho,0;t)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)\rho^3}\left[1-\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+1)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{c^2t^2}{\rho^2}+\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)\cdot\left(\frac{c^2t^2}{\rho^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{-\frac{3}{2}}\right] \tag{9-90}$$

变化。直到 $t=\sqrt{\varepsilon}\rho/c$ 时刻，场分量 $E_{2\rho}(\rho,0;t)$ 接近于

$$E_{2\rho}(\rho,0;t)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)\rho^3}\left[1-\frac{\varepsilon+3}{\varepsilon^2(\varepsilon-1)}\right] \tag{9-91}$$

在这个时刻，场分量 $E_{2\rho}(\rho,0;t)$ 的幅度迅速增长至无限大，然后减小至

$$E_{2\rho}(\rho,0;t)=\frac{2}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon^2-1)\rho^3} \tag{9-92}$$

场分量 $E_{2\rho}(\rho,0;t)$ 在区域 1(介质)中沿着边界以速度 $c/\sqrt{\varepsilon}$ 传播时，第二个脉冲到达的时刻为 $t=\sqrt{\varepsilon}\rho/c$。

9.1.3 瞬态场分量 $E_{2\varphi}$ 的严格解

1. 瞬态场分量 $E_{2\varphi}$ 的积分表达式

同样，如果水平偶极子是由 δ 源激励，时域场分量 $E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$ 可以通过傅里叶变换得到：

$$E_{2\varphi}\left(\rho',\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\widetilde{E}_{2\varphi}\left(\rho',\frac{\pi}{2};\omega\right)\mathrm{d}\omega \tag{9-93}$$

将式(9-10)代入式(9-93)，可得

$$\begin{aligned}E_{2\varphi}\left(\rho',\frac{\pi}{2};t\right)=&\frac{\mu_0}{2\pi^2c}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\omega\,\mathrm{d}\omega\\&\times\mathrm{Re}\int_0^\infty\left\{\frac{\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}{\omega^2\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}+\omega^2\varepsilon\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\right.\\&\left.+\frac{1}{\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}+\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}}\left[J_0(\lambda'\rho')-\frac{1}{\lambda'\rho'}J_1(\lambda'\rho')\right]\right\}\mathrm{d}\lambda'\lambda'\end{aligned} \tag{9-94}$$

作变量代换 $\lambda'=\omega\xi$，$\mathrm{d}\lambda'=\omega\mathrm{d}\xi$，则式(9-94)可改写为

$$E_{2\varphi}\left(\rho',\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{\mu_0}{2\pi^2 c}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\varepsilon\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\mathrm{i}}{\xi\rho'}\right.$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}J_1(\omega\xi\rho')\mathrm{d}\omega-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\sqrt{1-\xi^2}}$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}J_0(\omega\xi\rho')\mathrm{d}\omega+\frac{\mathrm{i}}{\xi\rho'}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}J_1(\omega\xi\rho')\mathrm{d}\omega\right]\right\}\xi\mathrm{d}\xi \tag{9-95}$$

于是

$$E_{2\varphi}\left(\rho',\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{\mu_0}{2\pi^2\rho' c}(I_2+I_3+I_4) \tag{9-96}$$

其中，I_2 和 I_3 的严格解见式(9-72)和式(9-87)。接下来的任务是求解积分 I_4：

$$I_4=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Im}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi \tag{9-97}$$

2. 积分 I_4 的计算

采用与前两节估算积分 I_1、I_2 和 I_3 相似的步骤，可得积分 I_4 的严格解。当 $t/\rho<1$ 时，有

$$I_4=0 \tag{9-98}$$

当 $1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}$ 时，则

$$I_4=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^1\left[\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\sqrt{1-\xi^2})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\sqrt{1-\xi^2})\left(-\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}\right)}\right]\xi\mathrm{d}\xi$$
$$+\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\left[\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+i\sqrt{\xi^2-1})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1})\left(-\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}\right)}\right]\right\}\xi\mathrm{d}\xi \tag{9-99}$$

式(9-99)中的第一个积分项是实数，只保留对积分有贡献的虚部，则 I_4 可表示为

$$I_4=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Im}\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{2}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi \tag{9-100}$$

于是

$$I_4=\frac{2}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi \tag{9-101}$$

作变量代换 $\zeta=\xi^2$ 后，则式(9-101)可写成

$$I_4=\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\mathrm{d}\zeta \tag{9-102}$$

令 $x'=\xi-1$，$T_0=\frac{t^2}{\rho'^2}-1$，则式(9-102)中的积分可表示为

$$\nu_0^{(6)}=\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{t^2/\rho'^2-\zeta}}\mathrm{d}\zeta=\int_0^{T_0}\frac{x'\mathrm{d}x'}{\sqrt{(T_0-x')x'}} \tag{9-103}$$

令 $x=x'+E_0$，$E_0=\frac{1}{\varepsilon+1}$及 $X_3=(T_0+E_0-x)(x-E_0)$，则式(9-103)可精确地求解为

$$\begin{aligned}\nu_0^{(6)}&=\int_{E_0}^{T_0+E_0}\frac{x\mathrm{d}x}{X_3^{\frac{1}{2}}}-E_0\int_{E_0}^{T_0+E_0}\frac{\mathrm{d}x}{X_3^{\frac{1}{2}}}\\&=\frac{\pi}{2}(T_0+2E_0)-\pi E_0=\frac{\pi}{2}\left(\frac{t^2}{\rho'^2}-1\right)\end{aligned} \tag{9-104}$$

故

$$I_4=\frac{\pi}{2(\varepsilon-1)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t^2}{\rho'^2}-1\right),\quad 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon} \tag{9-105}$$

当$\frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}$时，积分 I_4 可表示为

$$\begin{aligned}I_4=&-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Im}\left\{\int_1^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{2}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi\right.\\&\left.+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\frac{t}{\rho'}}\frac{2}{(\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-\varepsilon}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1})\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi\right\}\end{aligned} \tag{9-106}$$

于是

$$\begin{aligned}I_4&=\frac{2}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\int_1^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\frac{t}{\rho'}}\frac{\sqrt{\xi^2-1}-\sqrt{\varepsilon-\xi^2}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi\right\}\\&=\frac{2}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\int_1^{\frac{t}{\rho'}}\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi-\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\frac{t}{\rho'}}\frac{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi\right\}\end{aligned} \tag{9-107}$$

作变量代换 $\zeta=\xi^2$，$\mathrm{d}\zeta=2\xi\mathrm{d}\xi$ 后，式(9-107)可表示为

$$I_4=\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\mathrm{d}\zeta-\int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\varepsilon-\zeta}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\mathrm{d}\zeta\right\}\tag{9-108}$$

式(9-108)中的第一项积分的严格解见式(9-104)，接下来需要计算第二项积分。

令 $y'=\zeta-\varepsilon, T_\varepsilon=\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon$，则式(9-108)中的第二个积分可表示为

$$\nu_\varepsilon^{(6)}=\int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-\varepsilon}}{\sqrt{t^2/\rho'^2-\zeta}}\mathrm{d}\zeta=\int_0^{T_\varepsilon}\frac{y'\mathrm{d}y'}{\sqrt{(T_\varepsilon-y')y'}}\tag{9-109}$$

再作变量代换，$y=y'+E_0, E_0=\frac{1}{\varepsilon+1}$ 及 $Y_3=(T_\varepsilon+E_0-y)(y-E_0)$，则

$$\begin{aligned}\nu_\varepsilon^{(6)}&=\int_{E_0}^{T_\varepsilon+E_0}\frac{y\mathrm{d}y}{Y_3^{\frac{1}{2}}}-E_0\int_{E_0}^{T_0+E_0}\frac{\mathrm{d}y}{Y_3^{\frac{1}{2}}}\\&=\frac{\pi}{2}(T_\varepsilon+2E_0)-\pi E_0=\frac{\pi}{2}\left(\frac{t^2}{\rho'^2}-\varepsilon\right)\end{aligned}\tag{9-110}$$

于是

$$I_4=\frac{\pi}{2},\quad \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\tag{9-111}$$

从式(9-98)、式(9-105)和式(9-111)，可得

$$I_4=\frac{\pi}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_4\left(\frac{t}{\rho'}\right)\tag{9-112}$$

其中

$$f_4\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\begin{cases}0, & \frac{t}{\rho'}<1\\ \frac{1}{\varepsilon-1}\left(\frac{t^2}{\rho'^2}-1\right), & 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}\\ 1, & \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\tag{9-113}$$

显然，由于 $f_4(1-)=f_4(1+)=0, f_4(\sqrt{\varepsilon}-)=f_4(\sqrt{\varepsilon}+)=1$，可知 $f_4(t/\rho')$ 在任意一点上都是连续的。

$$f_4'\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\begin{cases}0, & \frac{t}{\rho'}<1\\ \frac{1}{\varepsilon-1}\frac{2t}{\rho'^2}, & 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}\\ 0, & \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\tag{9-114}$$

由于 $f_4'(1-)=0, f_4'(1+)=\frac{2}{(\varepsilon-1)\rho'}$，$f_1'\left(\frac{t}{\rho'}\right)$ 在 $\frac{t}{\rho'}=1$ 处存在一个跃变，其大小为 $\frac{2}{(\varepsilon-1)\rho'}$。同样，$f_4'(\sqrt{\varepsilon}-)=\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{(\varepsilon-1)\rho'}, f_4'(\sqrt{\varepsilon}+)=0$，$f_4'\left(\frac{t}{\rho'}\right)$ 在 $\frac{t}{\rho'}=\sqrt{\varepsilon}$ 处存在一个跃

变，其大小为$\frac{-2\sqrt{\varepsilon}}{(\varepsilon-1)\rho'}$。

$$f_4''\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\begin{cases}0, & \frac{t}{\rho'}<1\\ \frac{2}{(\varepsilon-1)\rho'^2}, & 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}\\ 0, & \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases} \tag{9-115}$$

最后，容易求得积分 I_4 的严格解，可表示为

$$I_4=\frac{c\pi}{(\varepsilon-1)\rho}\left[\delta\left(t-\frac{\rho}{c}\right)-\sqrt{\varepsilon}\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon}\rho}{c}\right)\right]+\frac{c^2\pi}{(\varepsilon-1)\rho^2}\begin{cases}0, & \frac{ct}{\rho}<1\\ 1, & 1<\frac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon}\\ 0, & \frac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases} \tag{9-116}$$

3. 场分量 $E_{2\varphi}$的严格解

将式(9-72)、式(9-87)和式(9-116)代入式(9-96)，容易得到电场分量 $E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$ 的严格解，可表示为

$$E_{2\varphi}\left(\rho,\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c(\varepsilon-1)\rho^2}\left[\delta\left(t-\frac{\rho}{c}\right)-\sqrt{\varepsilon}\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon}\rho}{c}\right)\right]+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon-1)\rho^3}$$
$$\times\begin{cases}0, & \frac{ct}{\rho}<1\\ 2-\frac{1}{\varepsilon+1}+\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+1)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{c^2t^2}{\rho^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{-\frac{3}{2}}, & 1<\frac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon}\\ \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}, & \frac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases} \tag{9-117}$$

在 $t=\frac{\rho}{c}$时刻，电场分量 $E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$的幅度瞬间增长至无限大，然后马上减小至

$$E_{2\varphi}\left(\rho,\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\rho^3}\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} \tag{9-118}$$

在区域 2(空气)中沿着边界以速度 c 传播时，第一个脉冲到达的时刻为 $t=\rho/c$。然后，场分量 $E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$的幅度随时间以

$$E_{2\varphi}\left(\rho,\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon-1)\rho^3}\left[2-\frac{1}{\varepsilon+1}+\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+1)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{c^2t^2}{\rho^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{-\frac{3}{2}}\right] \tag{9-119}$$

变化。直到 $t=\sqrt{\varepsilon}\rho/c$ 时刻，场分量 $E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$接近于

$$E_{2\varphi}\left(\rho,\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\rho^3}\frac{2\varepsilon^2+\varepsilon+1}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)} \tag{9-120}$$

在这个时刻，场分量 $E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$的幅度迅速增长至无限大，然后减小至

$$E_{2\varphi}(\rho,\frac{\pi}{2};t)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)\rho^3} \tag{9-121}$$

场分量 $E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$ 在区域 1(介质)中沿着边界以速度 $c\sqrt{\varepsilon}$ 传播时第二个脉冲到达的时刻为 $t=\sqrt{\varepsilon}\rho/c$。

9.1.4　瞬态场分量 B_{2z} 的严格解

同样，时域场分量 $B_{2z}(\rho,\pi/2;t)$ 可以通过傅里叶变换得到，即

$$B_{2z}(\rho',\frac{\pi}{2};t)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\widetilde{B}_{2z}(\rho',\frac{\pi}{2};\omega)\mathrm{d}\omega \tag{9-122}$$

将式(9-122)代入式(9-14)，可得

$$B_{2z}(\rho',\frac{\pi}{2};t)=\mathrm{Re}\frac{\mathrm{i}\mu}{2\pi^2c^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\cdot\int_0^{\infty}\frac{J_1(\lambda'\rho')}{\sqrt{\omega^2-\lambda'^2}+\sqrt{\omega^2\varepsilon-\lambda'^2}}\lambda'^2\mathrm{d}\lambda' \tag{9-123}$$

作变量代换 $\lambda'=\omega\xi,\mathrm{d}\lambda'=\omega\mathrm{d}\xi$，则式(9-123)可改写为

$$B_{2z}(\rho',\frac{\pi}{2};t)=\mathrm{Re}\frac{\mathrm{i}\mu_0}{2\pi^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^{\infty}\frac{\xi^2\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}J_1(\omega\xi\rho')\mathrm{d}\omega \tag{9-124}$$

考虑式(9-19)中的关系，可得

$$\begin{aligned}B_{2z}(\rho',\frac{\pi}{2};t)&=\mathrm{Re}\frac{\mathrm{i}\mu_0}{2\pi^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{\xi\rho'}\cdot\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-\xi^2\rho'^2}}\right)\xi^2\mathrm{d}\xi\\&=\frac{\mu_0}{2\pi^2c^2\rho'}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Im}\left[\int_0^{\infty}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\sqrt{1-\xi^2}}-\frac{t}{\rho'}\int_0^{\infty}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\sqrt{1-\xi^2})\cdot\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\right]\end{aligned} \tag{9-125}$$

采用与前几节估算积分 I_1、I_2、I_3 和 I_4 相似的步骤，可得式(9-125)中积分的严格解。

当 $t'/\rho<1$ 时，即

$$B_{2z}(\rho',\frac{\pi}{2};t)=0 \tag{9-126}$$

当 $1<t/\rho'<\sqrt{\varepsilon}$ 时，则

$$B_{2z}\left(\rho',\frac{\pi}{2};t\right)=-\frac{t}{\rho'}\int_0^\infty\left[\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1})\cdot\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\right]$$

$$=-\frac{\mu_0}{2\pi^2c^2\rho'}\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\infty\left[\sqrt{\xi^2-1}-\frac{t}{\rho'}\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\right]\xi\mathrm{d}\xi \tag{9-127}$$

作变量代换 $\zeta=\xi^2$ 后，则

$$B_{2z}\left(\rho',\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{\mu_0}{2\pi^2c^2\rho'}\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{t}{\rho'}\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\mathrm{d}\zeta\right] \tag{9-128}$$

式(9-128)中的积分的严格解见式(9-104)。因此

$$B_{2z}\left(\rho',\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{\mu_0}{4\pi c^2\rho'}\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{t}{\rho'}\left(\frac{t^2}{\rho'^2}-1\right)\right],\quad 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon} \tag{9-129}$$

当 $t/\rho'>\sqrt{\varepsilon}$时，则

$$\begin{aligned}B_{2z}\left(\rho',\frac{\pi}{2};t\right)=&\frac{\mu_0}{2\pi^2c^2\rho'}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Im}\left[\int_0^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1}}\right.\\&-\frac{t}{\rho'}\int_0^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{(\sqrt{\varepsilon-\xi^2}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1})\cdot\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\\&+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-\varepsilon}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1}}\\&\left.-\frac{t}{\rho'}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{(\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-\varepsilon}+\mathrm{i}\sqrt{\xi^2-1})\cdot\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\right]\\=&-\frac{\mu_0}{2\pi^2c^2\rho'}\cdot\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_0^{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\xi^2-1}\xi\mathrm{d}\xi\right.\\&-\frac{t}{\rho'}\int_0^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi\\&+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty(\sqrt{\xi^2-1}-\sqrt{\xi^2-\varepsilon})\xi\mathrm{d}\xi\\&\left.-\frac{t}{\rho'}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty\frac{(\sqrt{\xi^2-1}-\sqrt{\xi^2-\varepsilon})}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi\right]\end{aligned} \tag{9-130}$$

于是

$$B_{2z}(\rho',\frac{\pi}{2};t)=-\frac{\mu_0}{2\pi^2c^2\rho'}\cdot\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\times\left[\int_0^\infty\sqrt{\xi^2-1}\xi\mathrm{d}\xi-\frac{t}{\rho'}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi-\int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty\sqrt{\xi^2-\varepsilon}\xi\mathrm{d}\xi+\frac{t}{\rho'}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty\frac{\sqrt{\xi^2-\varepsilon}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\xi^2}}\xi\mathrm{d}\xi\right]\tag{9-131}$$

作变量代换 $\zeta=\xi^2$，则

$$B_{2z}(\rho',\frac{\pi}{2};t)=\frac{\mu_0}{2\pi^2c^2\rho'}\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{t}{\rho'}\left(\int_1^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{t^2/\rho'^2-\zeta}}\mathrm{d}\zeta-\int_\varepsilon^{\frac{t^2}{\rho'^2}}\frac{\sqrt{\zeta-\varepsilon}}{\sqrt{\frac{t^2}{\rho'^2}-\zeta}}\mathrm{d}\zeta\right)\right]\tag{9-132}$$

式(9-132)中的两个积分的严格解见式(9-104)和式(9-110)。于是，可得

$$B_{2z}(\rho',\frac{\pi}{2};t)=\frac{\mu_0}{4\pi c^2\rho'}\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{t}{\rho'}(\varepsilon-1)\right],\quad\frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\tag{9-133}$$

将式(9-126)、式(9-129)和式(9-133)代入式(9-125)，则可得

$$B_{2z}(\rho',\frac{\pi}{2};t)=\frac{\mu_0}{4\pi c^2\rho'}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_7\left(\frac{t}{\rho'}\right)\tag{9-134}$$

其中

$$f_7\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{t}{\rho'}\begin{cases}0, & \frac{t}{\rho'}<1\\ \frac{t^2}{\rho'^2}-1, & 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}\\ \varepsilon-1, & \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\tag{9-135}$$

显然，由于 $f_7(1-)=f_7(1+)=0$，$f_7(\sqrt{\varepsilon}-)=f_7(\sqrt{\varepsilon}+)=\sqrt{\varepsilon}$，可知 $f_7(t/\rho')$在任意处都是连续的。

$$f'_7\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'}\begin{cases}0, & \frac{t}{\rho'}<1\\ \frac{3t^2}{\rho'^2}-1, & 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}\\ \varepsilon-1, & \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\tag{9-136}$$

由于 $f'_7(1-)=0$，$f'_7(1+)=\frac{2}{(\varepsilon-1)\rho'}$，$f'(\frac{t}{\rho'})$在$\frac{t}{\rho'}=1$ 处存在一个跃变，其大小

为$\frac{2}{(\varepsilon-1)\rho'}$。同样，$f_7'(\sqrt{\varepsilon}-)=\frac{3\varepsilon-1}{(\varepsilon-1)\rho'}$，$f_7'(\sqrt{\varepsilon}+)=\frac{1}{\rho'}$，$f_7'(\frac{t}{\rho'})$在$\frac{t}{\rho'}=\sqrt{\varepsilon}$处存在一个跃变，其大小为$\frac{-2\sqrt{\varepsilon}}{(\varepsilon-1)\rho'}$。因此

$$f_7''\left(\frac{t}{\rho'}\right)=\frac{1}{(\varepsilon-1)\rho'^3}\begin{cases}0, & \frac{t}{\rho'}<1\\ 6t, & 1<\frac{t}{\rho'}<\sqrt{\varepsilon}\\ 0, & \frac{t}{\rho'}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases} \tag{9-137}$$

将式(9-137)代入式(9-134)，并考虑$\rho'=\frac{\rho}{c}$，磁场分量的严格解可表示为

$$\begin{aligned}B_{2z}(\rho,\frac{\pi}{2};t)=&\frac{\mu_0}{2\pi\rho^2}\frac{1}{\varepsilon-1}\left[\delta\left(t-\frac{\rho}{c}\right)-\varepsilon\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon}\rho}{c}\right)\right]\\&-\frac{\mu_0 c}{2\pi\rho^3}\frac{1}{\varepsilon-1}\begin{cases}0, & \frac{ct}{\rho}<1\\ \frac{3ct}{\rho}, & 1<\frac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon}\\ 0, & \frac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\end{aligned} \tag{9-138}$$

9.1.5 小结

前面给出了由δ源激励的水平电偶极子在半空间边界上产生的瞬态场的严格解。水平偶极子引起的切向电场分量由以下几部分组成：在空气中以光速c传播的脉冲波、在介质中传播的脉冲波，以及由偶极子上的电荷引起的静态场。对于电场分量$E_{2\rho}(\rho,0;t)$而言，脉冲波在介质中的传播速度为$c/\sqrt{\varepsilon}$；对电场分量$E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$而言，脉冲波在介质中的传播速度为$c\sqrt{\varepsilon}$。水平电偶极子在半空间边界上激励的瞬态场分量$E_{2\rho}(\rho,0;t)$、$E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$及$B_{2z}(\rho,\pi/2;t)$可以用若干个基本函数表示。而其余三个瞬态场分量$E_{2z}(\rho,0;t)$、$B_{2\rho}(\rho,\pi/2;t)$及$B_{2\varphi}(\rho,0;t)$无法给出严格解。

如果区域2不是空气，而是各向异性单轴介质，情况将更为复杂，利用相似的方法也可以进行求解[108]。但基本的推导过程和得到的结论是相似的，所以本书就不对这种情况进行阐述了。

9.2 高斯源激励的水平电偶极子在半空间边界上产生的瞬态场

9.2.1 高斯源激励的瞬态场的严格解

前面给出了 δ 源激励的水平电偶极子在半空间边界上产生的瞬态场分量 $E_{2\rho}(\rho,0;t)$、$E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$及 $B_{2z}(\rho,\pi/2;t)$的严格解的表达式是用若干个基本函数来表示的。我们可重新写成如下形式：

$$[E_{2\rho}(\rho,0;t)]_\delta=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c\rho^2}\left[\delta\left(t-\frac{\rho}{c}\right)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon}\rho}{c}\right)\right]+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)\rho^3}$$

$$\times\begin{cases}0, & \dfrac{ct}{\rho}<1\\ 1-\dfrac{1}{\varepsilon-1}\dfrac{c^2}{(\varepsilon+1)^{\frac{3}{2}}}\left(\dfrac{c^2t^2}{\rho^2}+\dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)\left(\dfrac{c^2t^2}{\rho^2}-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{-\frac{5}{2}}, & 1<\dfrac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon}\\ 2, & \dfrac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\tag{9-139}$$

$$\left[E_{2\varphi}\left(\rho,\frac{\pi}{2};t\right)\right]_\delta=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c(\varepsilon-1)\rho^2}\left[\delta\left(t-\frac{\rho}{c}\right)-\sqrt{\varepsilon}\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon}\rho}{c}\right)\right]+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon-1)\rho^3}$$

$$\times\begin{cases}0, & \dfrac{ct}{\rho}<1\\ 2-\dfrac{1}{\varepsilon+1}+\dfrac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+1)^{\frac{5}{2}}}\left(\dfrac{c^2t^2}{\rho^2}-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^{-\frac{3}{2}}, & 1<\dfrac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon}\\ \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}, & \dfrac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\tag{9-140}$$

$$\left[B_{2z}\left(\rho,\frac{\pi}{2};t\right)\right]_\delta=\frac{\mu_0}{2\pi\rho^2}\frac{1}{\varepsilon-1}\left[\delta\left(t-\frac{\rho}{c}\right)-\varepsilon\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon}\rho}{c}\right)\right]$$

$$-\frac{\mu_0 c}{2\pi\rho^3}\frac{1}{\varepsilon-1}\begin{cases}0, & \dfrac{ct}{\rho}<1\\ \dfrac{3ct}{\rho}, & 1<\dfrac{ct}{\rho}<\sqrt{\varepsilon}\\ 0, & \dfrac{ct}{\rho}>\sqrt{\varepsilon}\end{cases}\tag{9-141}$$

而由高斯源激励的水平偶极子在半空间边界上产生的瞬态场的严格解可以通过如下的关系式求得：

$$E_{2\rho}(\rho,0;t)=\frac{1}{t_1\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[E_{2\rho}(\rho,0;t-\zeta)]_{\delta}\cdot e^{-\frac{\zeta^2}{t_1^2}}d\zeta \tag{9-142}$$

$$E_{2\varphi}(\rho,\frac{\pi}{2};t)=\frac{1}{t_1\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[E_{2\varphi}(\rho,\frac{\pi}{2};t-\zeta)]_{\delta}\cdot e^{-\frac{\zeta^2}{t_1^2}}d\zeta \tag{9-143}$$

$$B_{2z}(\rho,\frac{\pi}{2};t)=\frac{1}{t_1\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[B_{2z}(\rho,\frac{\pi}{2};t-\zeta)]_{\delta}\cdot e^{-\frac{\zeta^2}{t_1^2}}d\zeta \tag{9-144}$$

这里，高斯脉冲的定义式可表示为

$$f(t)=\frac{e^{-\frac{t^2}{t_1^2}}}{t_1\sqrt{\pi}} \tag{9-145}$$

其中，t_1 是它的半宽。

因此，瞬态场分量的积分式可以写成由若干个积分相叠加的形式。

$$t_1\sqrt{\pi}E_{2\rho}(\rho,0;t)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c\rho^2}(I_1+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}I_2)+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)\rho^3}\times\left[I_3-\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot I_4+2I_5\right] \tag{9-146}$$

$$t_1\sqrt{\pi}E_{2\varphi}\left(\rho,\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c(\varepsilon-1)\rho^2}(I_1-\varepsilon^{\frac{1}{2}}I_2)+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon-1)\rho^3}\times\left[\left(2-\frac{1}{\varepsilon+1}\right)I_3+\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+1)^{\frac{5}{2}}}\cdot I_6+\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\cdot I_5\right] \tag{9-147}$$

$$t_1\sqrt{\pi}B_{2z}\left(\rho,\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{\mu_0}{2\pi\rho^2}\frac{1}{\varepsilon-1}(I_1-\varepsilon I_2)-\frac{\mu_0 c}{2\pi\rho^3}\frac{3I_7}{\varepsilon-1} \tag{9-148}$$

其中，这几个积分可表示为

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{\rho}{c}-\zeta\right)e^{-\frac{\zeta^2}{t_1^2}}d\zeta \tag{9-149}$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon}\rho}{c}-\zeta\right)e^{-\frac{\zeta^2}{t_1^2}}d\zeta \tag{9-150}$$

$$I_3=\int_{t-\sqrt{\varepsilon}\frac{\rho}{c}}^{t-\frac{\rho}{c}}e^{-\frac{\zeta^2}{t_1^2}}d\zeta \tag{9-151}$$

$$I_4=\int_{t-\sqrt{\varepsilon}\frac{\rho}{c}}^{t-\frac{\rho}{c}}\left[\frac{c^2(t-\zeta)^2}{\rho^2}+\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}\right]\left[\frac{c^2(t-\zeta)^2}{\rho^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right]^{-\frac{5}{2}}e^{-\frac{\zeta^2}{t_1^2}}d\zeta \tag{9-152}$$

$$I_5=\int_{-\infty}^{t-\sqrt{\varepsilon}\frac{\rho}{c}}e^{-\frac{\zeta^2}{t_1^2}}d\zeta \tag{9-153}$$

$$I_6=\int_{t-\sqrt{\varepsilon}\frac{\rho}{c}}^{t-\frac{\rho}{c}}\left[\frac{c^2(t-\zeta)^2}{\rho^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right]^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\zeta^2}{t_1^2}}d\zeta \tag{9-154}$$

$$I_7=\int_{t-\sqrt{\varepsilon}\frac{\rho}{c}}^{t-\frac{\rho}{c}}\frac{c(t-\zeta)}{\rho}e^{-\frac{\zeta^2}{t_1^2}}d\zeta \tag{9-155}$$

这里，I_1、I_2、I_3 和 I_5 容易直接积分得到，其结果为

$$I_1=e^{-(t'-\rho_1)^2} \tag{9-156}$$

$$I_2 = \mathrm{e}^{-(t'-\sqrt{\varepsilon}\rho_1)^2} \tag{9-157}$$

$$I_3 = \frac{t_1\sqrt{\pi}}{2}[\mathrm{erf}(t'-\rho_1) - \mathrm{erf}(t'-\sqrt{\varepsilon}\rho_1)] \tag{9-158}$$

$$I_5 = \frac{t_1\sqrt{\pi}}{2}[1 + \mathrm{erf}(t'-\sqrt{\varepsilon}\rho_1)] \tag{9-159}$$

其中

$$t' = \frac{t}{t_1}, \quad \rho_1 = \frac{\rho}{ct_1} \tag{9-160}$$

且误差函数的定义为

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{9-161}$$

接下来的主要任务是计算积分 I_4、I_6 和 I_7。为了便于计算这三个积分，将引入以下符号：

$$\zeta' = \frac{\zeta}{t_1}, \quad a^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \tag{9-162}$$

将式(9-162)代入式(9-152)、式(9-154)和式(9-155)，可得

$$I_4 = t_1\int_{t'-\sqrt{\varepsilon}\rho_1}^{t'-\rho_1}\left[\frac{(t'-\zeta')^2}{\rho_1^2} + 2a^2\right]\left[\frac{(t'-\zeta')^2}{\rho_1^2} - a^2\right]^{-\frac{5}{2}} \mathrm{e}^{-\zeta'^2}\,\mathrm{d}\zeta' \tag{9-163}$$

$$I_6 = t_1\int_{t'-\sqrt{\varepsilon}\rho_1}^{t'-\rho_1}\left[\frac{(t'-\zeta')^2}{\rho_1^2} - a^2\right]^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\zeta'^2}\,\mathrm{d}\zeta' \tag{9-164}$$

$$I_7 = t_1\int_{t'-\sqrt{\varepsilon}\rho_1}^{t'-\rho_1}\frac{t'-\zeta'}{\rho_1}\mathrm{e}^{-\zeta'^2}\,\mathrm{d}\zeta' \tag{9-165}$$

作变量代换 $x = \dfrac{t'-\zeta'}{\rho_1}$，$\mathrm{d}x = \dfrac{-\mathrm{d}\zeta'}{\rho_1}$，则 $\zeta' = t' - \rho_1 x$，可得

$$I_4 = \rho_1 t_1\int_1^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{x^2+2a^2}{(x^2-a^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{e}^{-(t'-\rho_1 x)^2}\,\mathrm{d}x \tag{9-166}$$

$$I_6 = \rho_1 t_1\int_1^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\mathrm{e}^{-(t'-\rho_1 x)^2}}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \tag{9-167}$$

$$I_7 = \rho_1 t_1\int_1^{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{e}^{-(t'-\rho_1 x)^2}\,x\mathrm{d}x \tag{9-168}$$

可见，上面三个积分是有限区间的积分，用数值方法很容易计算出结果。

9.2.2　计算结果及讨论

本节从位于半空间边界上由 δ 源激励的水平偶极子在边界上产生瞬态场的严格解出发，推导出由高斯源激励的由几个基本函数和有限积分表征的瞬态场分量的严格解。图 9-4 至图 9-6 所示分别为瞬态场分量 $t_1\sqrt{\pi}E_{2\rho}(\rho,0;t)$、$t_1\sqrt{\pi}E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$和 $t_1\sqrt{\pi}B_{2z}(\rho,\pi/2;t)$在几种不同传播距离下的计算结果。计算所采用的参数为：介质

半空间的相对介电系数取 $\varepsilon=80$，高斯脉冲的半宽取 $t_1=1\text{ns}$。

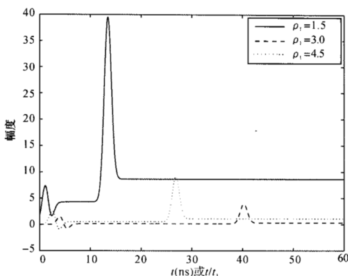


图 9-4　瞬态场分量 $t_1\sqrt{\pi}E_{2\rho}(\rho,0;t)$ 在几种不同传播距离下的计算结果

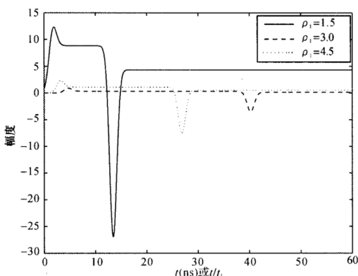


图 9-5　瞬态场分量 $t_1\sqrt{\pi}E_{2\varphi}(\rho,\frac{\pi}{2};t)$ 在几种不同传播距离下的计算结果

从理论推导过程及图 9-5 中的计算结果可以看出：$t_1\sqrt{\pi}E_{2\rho}(\rho,0;t)$ 由两部分的侧面波组成，它们的幅度均以 ρ^{-2} 衰减，并且在区域 2 中以速度 c 传播，在区域 1 中以速度 $c\varepsilon^{1/2}$ 传播。事实上，$t_1\sqrt{\pi}E_{2\rho}(\rho,0;t)$ 的第二个脉冲相较于第一个脉冲而言，其幅度大很多。另两个瞬态场分量 $t_1\sqrt{\pi}E_{2\varphi}(\rho,\pi/2;t)$ 和 $t_1\sqrt{\pi}B_{2z}(\rho,\pi/2;t)$ 也有相似的特性。

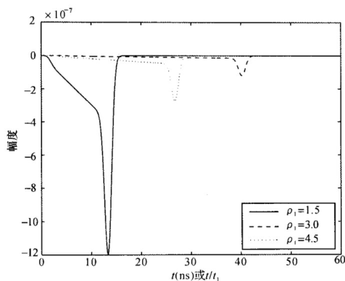


图 9-6　瞬态场分量 $t_1\sqrt{\pi}B_{2z}(\rho,\frac{\pi}{2};t)$在几种不同传播距离下的计算结果

第 10 章

水平电偶极子在一维各向异性介质表面激励的瞬态场的近似解

King 等人的专著[30]详细地阐述了由 δ 源和高斯源激励的水平电偶极子在半空间产生的瞬态电磁场的近似解。本章将 King 等人在这方面的工作扩展到各向异性单轴介质情况，阐述了由 δ 源和高斯源激励的水平电偶极子在单轴介质表面附近的瞬态场的近似解[109][110]。

10.1 δ 源激励的水平电偶极子在单轴介质表面产生的瞬态场

10.1.1 δ 源激励的瞬态场的解析表达式

本章所研究问题的物理模型如图 10-1 所示，其中 x 轴方向的单位水平电偶极子位于$(0,0,d)$处。区域 1 表示的上半空间是均匀各向同性介质，区域 2 表示的下半空间则是各向异性单轴介质。

$$\varepsilon_2=\varepsilon_0\begin{bmatrix}\varepsilon_T & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_T & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_L\end{bmatrix} \tag{10-1}$$

假设区域 1 和区域 2 的介质都是非磁性材料，即 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$，则区域 1 和 2 的波数分别为

$$k_1=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_1}=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}$$

$$k_T=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_T}=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_T}}{c} \tag{10-2}$$

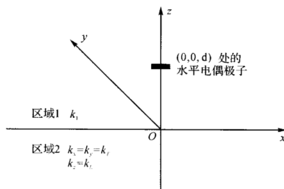


图 10-1　物理模型

$$k_L=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_L}=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_L}}{c}$$

当满足不等式

$$|k_1|\geqslant 3|k_L|,|k_1|\geqslant|k_T| \tag{10-3}$$

时，从一维各向异性介质边界附近的水平电偶极子产生的电磁场分量的频域表达式出发，可以得到一维各向异性介质边界上的 δ 源和高斯源激励的水平偶极子产生的瞬态场分量的解析解。

1985 年，潘威炎给出了水平电偶极子在一维各向异性介质表面激励的电磁场分量的解析表达式[88]。三个电场分量的表达式为

$$\begin{aligned}E_{1\rho}(\rho,\varphi,z)=&-\frac{\omega\mu_0}{2\pi k_1^2}\cos\varphi\\&\times\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1(z+d)}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_L\rho}\left[\frac{\mathrm{i}k_Lk_T}{\rho}-\frac{k_T}{\rho^2}-\frac{k_L^2k_T^2}{k_1}\left(\frac{\pi}{k_L\rho}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_e}\boldsymbol{F}(p_e)\right]\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_T\rho}}{\rho^3}\right\}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1r_1}\left(\frac{k_1}{\rho^2}+\frac{\mathrm{i}}{\rho^3}\right)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1r_2}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_1}{\rho^2}-\frac{3}{2\rho^3}\right)\right\}\end{aligned} \tag{10-4}$$

$$\begin{aligned}E_{1\varphi}(\rho,\varphi,z)=&\frac{\omega\mu_0}{2\pi k_1^2}\sin\varphi\\&\times\left\{k_T\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1(z+d)}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_L\rho}\left[\frac{1}{\rho^2}+\frac{\mathrm{i}k_Lk_T}{k_1\rho}\left(\frac{\pi}{k_L\rho}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_e}\boldsymbol{F}(p_e)\right]\right.\right.\\&\left.+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_T\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{2\mathrm{i}}{k_T\rho^3}\right)\right\}+\frac{k_1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1r_2}\left(\frac{\mathrm{i}k_1}{\rho}-\frac{3}{\rho^2}-\frac{3\mathrm{i}}{k_1\rho^3}\right)\right.\\&\left.-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1r_1}\left(\frac{\mathrm{i}k_1}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}-\frac{\mathrm{i}}{k_1\rho^3}\right)\right]\\&\left.+\mathrm{i}k_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1r_2}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)\left(\frac{\mathrm{i}k_1}{\rho}-\frac{3}{2\rho^2}-\frac{5\mathrm{i}}{8k_1\rho^3}\right)\right\}\end{aligned} \tag{10-5}$$

$$E_{1z}(\rho,\varphi,z)=\frac{\omega\mu_0}{2\pi k_1^2}\cos\varphi$$
$$\times\left\{\frac{k_L k_T}{k_1}\left\{e^{ik_1(z+d)}e^{ik_L\rho}\left[\frac{ik_L}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}-\frac{k_L^2 k_T}{k_1}\left(\frac{\pi}{k_L\rho}\right)^{\frac{1}{2}}e^{ip_e}F(p_e)\right]\right.\right.$$
$$\left.-e^{ik_1 r_2}\left(\frac{i}{\rho^2}-\frac{3}{2k_1\rho^3}\right)\right\}$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left[e^{ik_1 r_1}\left(\frac{z-d}{\rho}\right)+e^{ik_1 r_2}\left(\frac{z+d}{\rho}\right)\right]\left(\frac{ik_1^2}{\rho}-\frac{3k_1}{\rho^2}-\frac{3i}{\rho^3}\right)\right\}\tag{10-6}$$

其中，$r_1=\sqrt{\rho^2+(z-d)^2}$，$r_2=\sqrt{\rho^2+(z+d)^2}$ p_e 和 $F(p_e)$的定义如下：

$$p_e=k_L\rho\left(\frac{k_T^2}{2k_1^2}\right)\tag{10-7}$$

$$F(p_e)=\frac{1}{2}(1+i)-C_2(p_e)-iS_2(p_e)\tag{10-8}$$

其中

$$C_2(p_e)+iS_2(p_e)=\int_0^{p_e}\frac{e^{it}}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}}dt\tag{10-9}$$

作代换 $k_1=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}$，$k_T=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_T}}{c}$，$k_L=\omega\varepsilon_L=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_L}}{c}$，$\rho'=\frac{\rho}{c}$，并令 $z=d=0$，式(10-4)至式(10-6)可写成如下形式：

$$\tilde{E}_{1\rho}(\rho',0;\omega)=-\frac{\mu_0}{2\pi\varepsilon_1 c}$$
$$\times\left\{e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}\left[\frac{i\omega\sqrt{\varepsilon_L\varepsilon_T}}{\rho'}-\frac{\sqrt{\varepsilon_T}}{\rho'^2}-\omega^{\frac{3}{2}}\varepsilon_L\varepsilon_T\left(\frac{\pi}{\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}\right)^{\frac{1}{2}}e^{ip}F(p)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{ie^{i\omega}\sqrt{\varepsilon_T}\rho'}{\omega\varepsilon'^3}-e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_1}\rho'}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\rho'^2}+\frac{i}{\omega\varepsilon'^3}\right)\right\}\tag{10-10}$$

$$\tilde{E}_{1\varphi}\left(\rho',\frac{\pi}{2};\omega\right)=\frac{\mu_0}{2\pi\varepsilon_1 c}$$
$$\times\left\{\sqrt{\varepsilon_T}\left\{e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}\left[\frac{1}{\rho'^2}+\frac{i\sqrt{\omega}\sqrt{\varepsilon_L\varepsilon_T}}{\rho'}\left(\frac{\pi}{\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-ip}F(p)\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.+e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_T}\rho'}\left(\frac{1}{\rho'^2}+\frac{2i}{\omega\sqrt{\varepsilon_T}\rho'^3}\right)\right\}-e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_1}\rho'}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\rho'^2}+\frac{i}{\omega\rho'^3}\right)\right\}\tag{10-11}$$

$$\tilde{E}_{1z}(\rho',0;\omega)=\frac{\mu_0}{2\pi\varepsilon_1 c}$$
$$\times\frac{\sqrt{\varepsilon_L\varepsilon_T}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left\{e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}\left[\frac{i\omega\sqrt{\varepsilon_L}}{\rho'}-\frac{1}{\rho'^2}-\omega\frac{3}{2}\varepsilon_L\sqrt{\varepsilon_T}\left(\frac{\pi}{\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-ip}F(p)\right]\right.$$

$$
-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\sqrt{\varepsilon_1}\rho'}\left(\frac{\mathrm{i}}{\rho'^2}-\frac{3}{2\omega\sqrt{\varepsilon_1}\rho'^3}\right)\Bigg\} \tag{10-12}
$$

其中

$$
p=\frac{\omega\rho'\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}}{2\varepsilon_1},\quad \boldsymbol{F}(p)=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})-\int_0^p\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}}{(2\pi\tau)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\tau \tag{10-13}
$$

对 δ 函数激励源而言，电场分量的时域解可以通过对相应频域电场分量的傅里叶变换得到。式(10-10)至式(10-12)中时域场分量的积分表达式可表示为

$$
\begin{aligned}
E_{1\rho}(\rho',0;t)&=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\widetilde{E}_{1\rho}(\rho',0,\omega)\mathrm{d}\omega\\
&=-\frac{\mu_0}{2\pi\varepsilon_1 c}\cdot\Bigg[\frac{\sqrt{\varepsilon_L\varepsilon_T}\cdot I_1}{\rho'}-\frac{\sqrt{\varepsilon_T}\cdot I_2}{\rho'^2}\\
&\quad-\frac{I_3}{\rho'^3}+\frac{\varepsilon_L\varepsilon_T\cdot I_5}{\sqrt{\pi\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}}-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cdot I_7}{\rho'^2}-\frac{I_8}{\rho'^3}\Bigg]
\end{aligned} \tag{10-14}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{1\varphi}\left(\rho',\frac{\pi}{2};t\right)&=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\widetilde{E}_{1\varphi}\left(\rho',\frac{\pi}{2},\omega\right)\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{\mu_0}{2\pi\varepsilon_1 c}\cdot\Bigg[\frac{\sqrt{\varepsilon_T}\cdot I_2}{\rho'^2}-\frac{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\cdot I_6}{\sqrt{\pi\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}}\rho'^{3/2}}\\
&\quad+\frac{\varepsilon_T\cdot I_4}{\rho'^2}+\frac{2\cdot I_3}{\rho'^3}-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cdot I_7}{\rho'^2}-\frac{I_8}{\rho'^3}\Bigg]
\end{aligned} \tag{10-15}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{1z}(\rho',0;t)&=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\widetilde{E}_{1z}(\rho',0,\omega)\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{\mu_0}{2\pi\varepsilon_1 c}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_L\varepsilon_T}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\Bigg[\frac{\sqrt{\varepsilon_L}\cdot I_1}{\rho'}-\frac{I_2}{\rho'^2}\\
&\quad+\frac{\varepsilon_L\sqrt{\varepsilon_T}\cdot I_5}{\sqrt{\pi\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}}-\frac{\mathrm{i}\cdot I_7}{\rho'^2}-\frac{\mathrm{i}3\cdot I_8}{2\sqrt{\varepsilon_1}\rho'^3}\Bigg]
\end{aligned} \tag{10-16}
$$

其中

$$
I_1=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho')}\mathrm{d}\omega \tag{10-17}
$$

$$
I_2=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho')}\mathrm{d}\omega \tag{10-18}
$$

$$
I_3=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\sqrt{\varepsilon_T}\rho')}\mathrm{d}\omega \tag{10-19}
$$

$$
I_4=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\sqrt{\varepsilon_T}\rho')}\mathrm{d}\omega \tag{10-20}
$$

$$
I_5=-\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\omega^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho'+\frac{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}}{2\varepsilon_1}\rho'\right)}
$$

$$\times\left[\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})-\int_{0}^{\frac{\omega\rho'\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}}{2\varepsilon_1}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}}{(2\pi\tau)^{1/2}}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega \tag{10-21}$$

$$I_6=-\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\mathrm{i}\omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho'+\frac{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}}{2\varepsilon_1}\rho'\right)}$$

$$\times\left[\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})-\int_{0}^{\frac{\omega\rho'\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}}{2\varepsilon_1}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}}{(2\pi\tau)^{1/2}}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega \tag{10-22}$$

$$I_7=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\sqrt{\varepsilon_1}\rho')}\mathrm{d}\omega \tag{10-23}$$

$$I_8=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\sqrt{\varepsilon_1}\rho')}\mathrm{d}\omega \tag{10-24}$$

采用 King 等人的专著[30]中所述相似的方法，式(10-17)至式(10-24)中的积分可以精确地计算出来。

$$I_1=-\delta'(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho') \tag{10-25}$$

$$I_2=\delta(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho') \tag{10-26}$$

$$I_3=\begin{cases}1, & t>\sqrt{\varepsilon_T}\rho'\\ 0, & t<\sqrt{\varepsilon_T}\rho'\end{cases} \tag{10-27}$$

$$I_4=\delta(t-\sqrt{\varepsilon_T}\rho') \tag{10-28}$$

$$\begin{aligned}I_5=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\Bigg[&\left(\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}\right)^{1/2}\cdot\delta'(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho')\\&-\frac{1}{2}\left(\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}\right)^{3/2}\cdot\delta(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho')\\&+\frac{3}{4}\left(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho'+\frac{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}{2\varepsilon_1}\right)^{-5/2}U(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho')\Bigg]\end{aligned} \tag{10-29}$$

$$\begin{aligned}I_6=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\Bigg[&\left(\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}\right)^{1/2}\cdot\delta(1-\sqrt{\varepsilon_L}\rho')\\&-\frac{1}{2}\left(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho'+\frac{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}{2\varepsilon_1}\right)^{-3/2}U(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho')\Bigg]\end{aligned} \tag{10-30}$$

$$I_7=\delta(t-\sqrt{\varepsilon_1}\rho') \tag{10-31}$$

$$I_8=\begin{cases}1, & t>\sqrt{\varepsilon_1}\rho'\\ 0, & t<\sqrt{\varepsilon_1}\rho'\end{cases} \tag{10-32}$$

将式(10-25)至式(10-32)代入式(10-14)至式(10-16)，并用 ρ/c 代替 ρ'，可以得到电场分量的时域解为

$$E_{1\rho}(\rho,0;t)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c\rho^2}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_T}}\left(1+\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_1}\right)\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon_L}\rho}{c}\right)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\rho}{c}\right)\right]$$

$$
+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\rho^3}\cdot\begin{cases}0, & ct/\rho<\sqrt{\varepsilon_L}\\ -3\varepsilon_1^2\varepsilon_T\varepsilon_L^{3/4}\left[3\varepsilon_1\left(\dfrac{ct}{\rho}-\sqrt{\varepsilon_L}\right)+\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\right]^{-5/2}, & \sqrt{\varepsilon_L}<ct/\rho<\sqrt{\varepsilon_T}\\ 1-3\varepsilon_1^2\varepsilon_T\varepsilon_L^{3/4}\left[2\varepsilon_1\left(\dfrac{ct}{\rho}-\sqrt{\varepsilon_L}\right)+\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\right]^{-5/2}, & \sqrt{\varepsilon_T}<ct/\rho<\sqrt{\varepsilon_1}\\ 2-3\varepsilon_1^2\varepsilon_T\varepsilon_L^{3/4}\left[2\varepsilon_1\left(\dfrac{ct}{\rho}-\sqrt{\varepsilon_L}\right)+\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\right]^{-5/2}. & ct/\rho>\sqrt{\varepsilon_1}\end{cases} \tag{10-33}
$$

$$
E_{1\varphi}\left(\rho,\frac{\pi}{2};t\right)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 c\rho^2}\cdot\left[\sqrt{\varepsilon_T}\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon_T}\rho}{c}\right)-\sqrt{\varepsilon_1}\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\rho}{c}\right)\right]
$$

$$
+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\rho^3}\cdot\begin{cases}0 & ct/\rho<\sqrt{\varepsilon_L}\\ \varepsilon_1\varepsilon_T\varepsilon_L^{1/4}\left[2\varepsilon_1\left(\dfrac{ct}{\rho}-\sqrt{\varepsilon_L}\right)+\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\right]^{-3/2} & \sqrt{\varepsilon_L}<ct/\rho<\sqrt{\varepsilon_T}\\ 2+\varepsilon_1\varepsilon_T\varepsilon_L^{1/4}\left[2\varepsilon_1\left(\dfrac{ct}{\rho}-\sqrt{\varepsilon_L}\right)+\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\right]^{-3/2} & \sqrt{\varepsilon_T}<ct/\rho<\sqrt{\varepsilon_1}\\ 1+\varepsilon_1\varepsilon_T\varepsilon_L^{1/4}\left[2\varepsilon_1\left(\dfrac{ct}{\rho}-\sqrt{\varepsilon_L}\right)+\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\right]^{-3/2} & ct/\rho>\sqrt{\varepsilon_1}\end{cases}, \tag{10-34}
$$

$$
E_{1z}(\rho,0;t)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_1}c\rho^2}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_T}}\left(1+\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_1}\right)\delta\left(t-\frac{\varepsilon_L\rho}{c}\right)
$$

$$
+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\rho^3}\cdot\begin{cases}0 & ct/\rho>\sqrt{\varepsilon_L}\\ 3\varepsilon_1^{3/2}\varepsilon_T\varepsilon_L^{5/4}\left[2\varepsilon_1\left(\dfrac{ct}{\rho}-\sqrt{\varepsilon_L}\right)+\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\right]^{-5/2} & ct/\rho>\sqrt{\varepsilon_L}\end{cases}, \tag{10-35}
$$

对于 δ 激励源产生的瞬态场分量，由式(10-33)至式(10-35)可知以下性质：

(1)任意的传播距离 ρ 处，电场分量 $E_{1\rho}$ 包含两个 δ 函数脉冲，这两个脉冲分别以速度 $c\sqrt{\varepsilon_L}$ 和 $c\sqrt{\varepsilon_1}$ 沿着边界传播，脉冲到达的时刻分别为 $t=\rho\sqrt{\varepsilon_L}/c$ 和 $t=\rho\sqrt{\varepsilon_1}/c$。同样地，$E_{1\varphi}$ 也包含两个 δ 函数脉冲，这两个脉冲分别以速度 $c\sqrt{\varepsilon_T}$ 和 $c\sqrt{\varepsilon_1}$ 沿着边界传播，脉冲到达的时刻分别为 $t=\rho\sqrt{\varepsilon_T}/c$ 和 $t=\rho\sqrt{\varepsilon_1}/c$。

(2)当源点和场点都位于边界上时，侧面脉冲波以 ρ^{-2} 的规律衰减。

(3)对电场分量 $E_{1\rho}$ 而言，两个脉冲的幅度分别为 $\sqrt{\varepsilon_T}/(1+\varepsilon_T/\varepsilon_1)$ 和 $1/\sqrt{\varepsilon_1}$。当满足式(10-3)中的条件时，第二个脉冲的幅度与第一个相比很小。相反的，对电场分量 $E_{1\varphi}$ 而言，以 $\sqrt{\varepsilon_1}$ 幅度因子的第二个脉冲要比以 $\sqrt{\varepsilon_T}$ 为幅度因子的第一个脉冲要大很多。

从式(10-33)至式(10-35)出发，容易得到由 δ 源激励的水平偶极子在边界上任意一点产生的完整的瞬态场分量表达式：

$$E_{1\rho}(\rho,\varphi;t)=E_{1\rho}(\rho,0;t)\cos\varphi \tag{10-36}$$

$$E_{1\varphi}(\rho,\varphi;t)=E_{1z}\left(\rho,\frac{\pi}{2};t\right)\sin\varphi \tag{10-37}$$

$$E_{1z}(\rho,\varphi;t)=E_{1z}(\rho,0;t)\cos\varphi \tag{10-38}$$

当水平电偶极子位于高度 d 时，能够导出高度 z 处的电场分量的表达式。当满足约束条件 $\rho\geqslant 5|z|$ 和 $\rho\geqslant 5d$ 时，电场分量 $E_{1\rho}(\rho,\ 0;t)$ 的解析表达式可表示为

$$\begin{aligned}E_{1\rho}(\rho,0,z;t)=&\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c\rho^2}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_T}}\left(1+\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_1}\right)\delta\left(t-\frac{\sqrt{\varepsilon_L}s_L}{c}\right)+\frac{1}{\varepsilon_1}\delta\left(1-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}r_1}{c}\right)\right]\\&+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\rho^3}\cdot\begin{cases}0 & ct<\sqrt{\varepsilon_L}s_L\\ -3\varepsilon_1^2\varepsilon_T\varepsilon_L^{3/4}\left[2\varepsilon_1\left(\dfrac{ct-\sqrt{\varepsilon_L}s_L}{\rho}\right)+\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\right]^{-5/2} & \sqrt{\varepsilon_L}s_L<ct<\sqrt{\varepsilon_T}s_T\\ 1-3\varepsilon_1^2\varepsilon_T\varepsilon_L^{3/4}\left[2\varepsilon_1\left(\dfrac{ct-\sqrt{\varepsilon_L}s_L}{\rho}\right)+\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\right]^{-5/2} & \sqrt{\varepsilon_T}s_t<ct<\sqrt{\varepsilon_1}r_1\\ 2-3\varepsilon_1^2\varepsilon_T\varepsilon_L^{3/4}\left[2\varepsilon_1\left(\dfrac{ct-\sqrt{\varepsilon_L}s_L}{\rho}\right)+\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\right]^{-5/2} & ct>\sqrt{\varepsilon_1}r_1\end{cases},\end{aligned} \tag{10-39}$$

其中

$$\begin{aligned}s_L&=\rho+\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_L}(z+d)\\ s_T&=\rho+\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_T}(z+d)\\ r_1&=[\rho^2+(z-d)^2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{10-40}$$

另外两个电场分量的时域解也可以通过相似的方法容易得到，这里就不再一一列出。

10.1.2 计算结果及讨论

图 10-2 所示为位于各向异性介质表面的水平偶极子激励的电场分量

$E_{1\rho}(\rho, 0;t)$的计算结果。计算所用参数为 $\varepsilon_1=80$，$\varepsilon_T=4$，$\varepsilon_L=2$。为了与各向异性介质情况相比较，图 10-2 还给出了各向同性介质情况的计算结果。计算所用参数为 $\varepsilon_1=80$，$\varepsilon_2=1$。从图中可以看出，当 $ct/\rho>\sqrt{\varepsilon_T}$时，各向异性情况与各向同性情况下的计算结果相差很小。也就是说，在 $ct/\rho>\sqrt{\varepsilon_T}$的情况下，各向异性的特性对电场分量产生的影响很小。同样，电场分量 $E_{1\varphi}(\rho, \pi/2, t)$有着与 $E_{1\rho}(\rho, 0, t)$相似的特性。

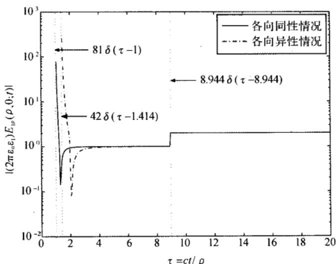


图 10-2　各向同性和各向异性两种情况下瞬态场分量 $E_{1\rho}(\rho,0;t)$的计算结果比较

本节主要讨论了由位于一维各向异性介质表面上的由 δ 源激励的水平偶极子产生的瞬态场分量。电场分量的时域解由两个 δ 函数侧面脉冲组成，这两个脉冲以幅度 ρ^{-2} 的规律衰减，并以不同的速度和幅度沿着边界面传播。

10.2　高斯源激励的水平电偶极子在单轴介质表面上的瞬态场

10.1 节给出了位于单轴各向异性介质表面上的由 δ 源激励的水平偶极子产生的瞬态场的解析表达式。下面将对这种情况进行进一步延伸，研究水平电偶极子由高斯源激励的情况。

10.2.1　高斯源激励的瞬态场的解析表达式

首先，需要定义高斯脉冲及其傅里叶变换形式，可表示为

$$f(t)=\frac{e^{-\frac{t^2}{t_1^2}}}{\sqrt{\pi}t_1} \tag{10-41}$$

$$\widetilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{t_1^2}}}{\sqrt{\pi}t_1}e^{i\omega t}dt=e^{-\frac{\omega^2t_1^2}{4}} \tag{10-42}$$

式中：t_1 是高斯脉冲的半宽。

为了研究高斯源激励的瞬态场，类似于 δ 源激励情况的推导过程，也可以直接写出如下形式的时域场分量的积分表达式：

$$\begin{aligned}E_{1\rho}(\rho',0,t)&=\text{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\widetilde{f}(\omega)\widetilde{E}_{1\rho}(\rho',0,\omega)d\omega\\&=-\frac{\mu_0}{2\pi\varepsilon_1c}\cdot\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_L\varepsilon_T}\cdot I_1}{\rho'}-\frac{\sqrt{\varepsilon_T}\cdot I_2}{\rho'^2}-\frac{I_3}{\rho'^3}+\frac{\varepsilon_L\varepsilon_T\cdot I_5}{\sqrt{\pi\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}}-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cdot I_7}{\rho'^2}-\frac{I_8}{\rho'^3}\right)\end{aligned} \tag{10-43}$$

$$\begin{aligned}E_{1\varphi}(\rho',\pi/2,t)&=\text{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\widetilde{f}(\omega)\widetilde{E}_{1\varphi}(\rho',\pi/2,\omega)d\omega\\&=\frac{\mu_0}{2\pi\varepsilon_1c}\cdot\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_T}\cdot I_2}{\rho'^2}-\frac{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}\cdot I_6}{\sqrt{\pi\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}}\rho'^{3/2}}+\frac{\sqrt{\varepsilon_T}\cdot I_4}{\rho'^2}+\frac{2\cdot I_3}{\rho'^3}-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cdot I_7}{\rho'^2}-\frac{I_8}{\rho'^3}\right)\end{aligned} \tag{10-44}$$

$$\begin{aligned}E_{1z}(\rho',0,t)&=\text{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\widetilde{f}(\omega)\widetilde{E}_{1z}(\rho',0,\omega)d\omega\\&=\frac{\mu_0}{2\pi\varepsilon_1c}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_L\varepsilon_T}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_L}\cdot I_1}{\rho'}-\frac{I_2}{\rho'^2}+\frac{\varepsilon_L\sqrt{\varepsilon_T}\cdot I_5}{\sqrt{\pi\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}\rho'}}\right)\end{aligned} \tag{10-45}$$

其中

$$I_1=\text{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\omega e^{-\frac{\omega^2t_1^2}{4}}e^{-i\omega(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho')}d\omega \tag{10-46}$$

$$I_2=\text{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\omega^2t_1^2}{4}}e^{-i\omega(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho')}d\omega \tag{10-47}$$

$$I_3=\text{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{\omega}e^{-\frac{\omega^2t_1^2}{4}}e^{-i\omega(t-\sqrt{\varepsilon_T}\rho')}d\omega \tag{10-48}$$

$$I_4=\text{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\omega^2t_1^2}{4}}e^{-i\omega(t-\sqrt{\varepsilon_T}\rho')}d\omega \tag{10-49}$$

$$I_5=-\text{Re}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\omega^2t_1^2}{4}}e^{-i\omega\left(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho'+\frac{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}}{2\varepsilon_1}\rho'\right)}\left[\frac{1}{2}(1+i)-\int_0^P\frac{e^{i\tau}}{(2\pi\tau)^{\frac{1}{2}}}d\tau\right]d\omega \tag{10-50}$$

$$I_6=-\text{Re}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}i\omega\frac{1}{2}e^{-\frac{\omega^2t_1^2}{4}}e^{-i\omega\left(t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho'+\frac{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}}{2\varepsilon_1}\rho'\right)}\left[\frac{1}{2}(1+i)-\int_0^P\frac{e^{i\tau}}{(2\pi\tau)^{\frac{1}{2}}}d\tau\right]d\omega \tag{10-51}$$

$$I_7 = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2 t_1^2}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\sqrt{\varepsilon_1}\rho')}\mathrm{d}\omega \tag{10-52}$$

$$I_8 = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2 t_1^2}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\sqrt{\varepsilon_1}\rho')}\mathrm{d}\omega \tag{10-53}$$

研究上述积分,可以发现下面的关系式成立:

$$I_1 = -\frac{\partial I_2}{\partial t},\quad \frac{\partial I_3}{\partial t} = I_4,\quad \frac{\partial I_8}{\partial t} = I_7 \tag{10-54}$$

为了简化表达式,需要作如下的变量代换:

$$\tau_L \equiv t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho' = t-\frac{\sqrt{\varepsilon_L}\rho}{c},\ \tau_T \equiv t-\sqrt{\varepsilon_T}\rho' = t-\frac{\sqrt{\varepsilon_T}\rho}{c},\ \tau_1 \equiv t-\sqrt{\varepsilon_1}\rho' = t-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\rho}{c} \tag{10-55}$$

则积分式 I_2、I_4 和 I_7 可以准确地计算出来,分别为

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}t_1}\mathrm{e}^{-\tau_L^2/t_1^2},\quad I_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}t_1}\mathrm{e}^{-\tau_T^2/t_1^2},\quad I_7 = \frac{1}{\sqrt{\pi}t_1}\mathrm{e}^{-\tau_1^2/t_1^2} \tag{10-56}$$

通过式(10-21),I_1、I_3 和 I_8 也能较容易计算出来,分别为

$$I_1 = \frac{2\tau_L}{\sqrt{\pi}t_1^3}\mathrm{e}^{-\frac{\tau_L^2}{t_1^2}},\quad I_9 = \frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{\tau_T}{t_1}\right)\right],\quad I_8 = \frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)\right] \tag{10-57}$$

其中,误差函数可定义为

$$\mathrm{erf}z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = 1 \tag{10-58}$$

下一步的主要任务是计算积分 I_5 和 I_6。利用 King 等人的专著[30]中的 14.8 节所述的方法,经过复杂的运算,容易得到积分 I_5 的解析式,如下:

$$I_5 = -\frac{\pi}{2}\frac{2^{\frac{1}{4}}}{t_1^{\frac{5}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{T^2}{2t_1^2}}\cdot\begin{cases} V\left(0,\frac{\sqrt{2}T}{t_1}\right)-\frac{\sqrt{2}T}{t_1}V\left(-1,\frac{\sqrt{2}T}{t_1}\right), & \frac{T}{t_1}\geqslant 0 \\ \pi^{-1/2}\left[U\left(0,-\frac{\sqrt{2}T}{t_1}\right)+\frac{2\sqrt{2}T}{t_1}U\left(-1,-\frac{\sqrt{2}T}{t_1}\right)\right], & \frac{T}{t_1}\leqslant 0 \end{cases} \tag{10-59}$$

其中,$V(a,z)$和$U(a,z)$是抛物柱函数。想了解抛物柱函数的性质,请参阅数学手册[120]。

$$T \equiv t-\sqrt{\varepsilon_L}\rho'+\frac{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}}{2\varepsilon_1\rho'} \tag{10-60}$$

需要指出的是,符号 $U(a,z)$与阶梯函数 $U(x)$无关。

由式(10-51),可得

$$I_6 = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{4}(1+\mathrm{i})\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2 t_1^2}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\mathrm{d}\omega - \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2 t_1^2}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\mathrm{d}\omega\int_0^P\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}}{(2\pi\tau)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\tau\right] \tag{10-61}$$

式中:的第二个积分是个纯虚数,因此对积分无任何贡献[30]。式(10-61)重写成

$$I_6 = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\,\frac{1}{4}(1+\mathrm{i})\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2 t_1^2}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\,\mathrm{d}\omega \tag{10-62}$$

采用变量代换 $\omega=\frac{\sqrt{2}\tau}{t_1}, z=\frac{\sqrt{2}T}{t_1}$，则可得

$$I_6 = \mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} 2^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2} t_1^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial t}\nu_0 \tag{10-63}$$

其中

$$\nu_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2} - \mathrm{i}z\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{10-64}$$

直接利用 King 等人的专著[30]中的式(14.6.33)的结果，可得

$$\nu_0 = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} f\left(\frac{1}{4}z^2\right) \tag{10-65}$$

$$f\left(\frac{1}{4}z^2\right) = \sqrt{2} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}z^2\right) + 2\pi I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}z^2\right) \tag{10-66}$$

考虑到下面这些关系式

$$y = \left(\frac{1}{2}z\right) f\left(\frac{1}{4}z^2\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} V(0,z) \tag{10-67}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} V'(0,z) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{z}{2}V(0,z) - \frac{1}{2}V(-1,z)\right] \tag{10-68}$$

可得

$$\frac{\partial \nu_0}{\partial t} = \frac{\partial \nu_0}{\partial T} = \frac{\sqrt{2}}{t_1}\frac{\partial \nu_0}{\partial z} = -\frac{\pi \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}}{t_1} V(-1,z), \quad z \geqslant 0 \tag{10-69}$$

当 z 取负值，并令 $a=-1$ 时，采用数学手册[120]中的式(19.4.2)，可得

$$V(-1,z) = -\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\pi} U(-1,-z) \tag{10-70}$$

由于 $\Gamma(-1/2) = -2\pi^{\frac{1}{2}}$，于是

$$\frac{\partial \nu_0}{\partial t} = -\frac{\pi \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}}{t_1} 2\pi^{-\frac{1}{2}} U(-1,-z), \quad z \leqslant 0 \tag{10-71}$$

将式(10-69)和(10-71)代入式(10-63)，可得 I_6 的解析表达式为

$$I_6 = -\frac{2^{\frac{1}{4}}\pi \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}}{2\sqrt{2} t_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{cases} V\left(-1, \frac{\sqrt{2}T}{t_1}\right) \\ 2\pi^{-\frac{1}{2}} U\left(-1, \frac{\sqrt{2}T}{t_1}\right) \end{cases}, \quad \begin{matrix} T/t_1 \geqslant 0 \\ T/t_1 \leqslant 0 \end{matrix} \tag{10-72}$$

引入以下无量纲变量：

$$\rho_1 \equiv \frac{\rho'}{t_1} = \frac{\rho}{ct_1}, t' \equiv \frac{t}{t_1}, \tau_L' \equiv \frac{\tau_L}{t_1} = t' - \sqrt{\varepsilon_L}\rho_1 \tag{10-73}$$

$$\tau_T' \equiv \frac{\tau_T}{t_1} = t' - \sqrt{\varepsilon_T}\rho_1, \tau_1' \equiv \frac{\tau_1}{t_1} = t' - \sqrt{\varepsilon_1}\rho_1, T' \equiv \frac{T}{t_1} = t' - \sqrt{\varepsilon_L}\rho_1 + \frac{\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}}{2\varepsilon_1}\rho_1 \tag{10-74}$$

则可得到瞬态场分量的解析表达式为

$$\begin{aligned} E_{1\rho}(\rho,0;t) = & \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{c^3 t_1^3} \cdot \left[\left(-\frac{2\sqrt{\varepsilon_L\varepsilon_T}\cdot\tau_L'}{\rho_1} + \frac{\sqrt{\varepsilon_L}}{\rho_1}\right)e^{-\tau_L'^2} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\rho_1^3}(1+\mathrm{erf}\tau_T')\right. \\ & + \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\rho_1}e^{-\tau_1'^2} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\rho_1^3}(1+\mathrm{erf}\tau_1')\right) + \frac{\pi}{2}\frac{2^{\frac{1}{4}}\varepsilon_L\varepsilon_T}{\sqrt{\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}\rho_1}}e^{-\frac{T'^2}{2}} \\ & \left.\cdot\begin{cases} V(0,\sqrt{2}T') - \sqrt{2}T'V(-1,\sqrt{2}T') \\ \pi^{-\frac{1}{2}}[U(0,-\sqrt{2}T') + 2\sqrt{2}T'U(-1,\sqrt{2}T')] \end{cases}\right], \quad \begin{matrix} T' \geqslant 0 \\ T' \leqslant 0 \end{matrix} \end{aligned} \tag{10-75}$$

$$\begin{aligned} E_{1\varphi}(\rho,\frac{\pi}{2};t) = & \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{c^3 t_1^3} \cdot \left[(e^{-\tau_L'^2} + e^{-\tau_T'^2})\frac{\sqrt{\varepsilon_T}}{\rho_1^2} + \frac{\pi^{1/2}}{\rho_1^3}(1+\mathrm{erf}\tau_T')\right. \\ & \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\rho_1^2}e^{-\tau_1'^2} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\rho_1^3}(1+\mathrm{erf}\tau_1')\right) + \frac{2^{\frac{1}{4}}\pi\varepsilon_T\sqrt{\varepsilon_L}}{2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}\rho_1^{\frac{3}{2}}}}e^{-\frac{T'^2}{2}} \\ & \left.\cdot\begin{cases} V(-1,\sqrt{2}T') \\ 2\pi^{-\frac{1}{2}}U(-1,-\sqrt{2}T') \end{cases}\right], \quad \begin{matrix} T' \geqslant 0 \\ T' \leqslant 0 \end{matrix} \end{aligned} \tag{10-76}$$

$$\begin{aligned} E_{1z}(\rho,0;t) = & -\frac{\sqrt{\varepsilon_L\varepsilon_T}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_T^{\frac{3}{2}}}\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{c^3 t_1^3} \cdot \left[\left(-\frac{2\sqrt{\varepsilon_L}\cdot\tau_L'}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2}\right)e^{-\tau_L'^2} + \frac{\pi}{2}\frac{2^{\frac{1}{4}}\varepsilon_L\sqrt{\varepsilon_T}}{\sqrt{\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_L}\rho_1}}e^{-\frac{T'^2}{2}}\right. \\ & \left.\cdot\begin{cases} V(0,\sqrt{2}T') - \sqrt{2}T'V(-1,\sqrt{2}T') \\ \pi^{-\frac{1}{2}}[U(0,-\sqrt{2}T') + 2\sqrt{2}T'U(-1,\sqrt{2}T')] \end{cases}\right], \quad \begin{matrix} T' \geqslant 0 \\ T' \leqslant 0 \end{matrix} \end{aligned} \tag{10-77}$$

最后，根据以下关系式，可以得到边界上任意一点产生的瞬态场分量的解析表达式：

$$E_{1\rho}(\rho,\varphi;t) = E_{1\rho}(\rho,0;t)\cos\varphi \tag{10-78}$$

$$E_{1\varphi}(\rho,\varphi;t) = E_{1\varphi}\left(\rho,\frac{\pi}{2};t\right)\sin\varphi \tag{10-79}$$

$$E_{1z}(\rho,\varphi;t) = E_{1z}(\rho,0;t)\cos\varphi \tag{10-80}$$

10.2.2 计算结果及讨论

本节介绍由高斯源激励的水平电偶极子在各向异性介质表面产生的瞬态场的近似解。图 10-3 至图 10-5 所示分别为三个电场分量$t_1\sqrt{\pi}E_{1\rho}(\rho,0;t)$、$t_1\sqrt{\pi}E_{1\varphi}(\rho,\pi/2;t)$和 $t_1\sqrt{\pi}E_{1z}(\rho,0;t)$在几种不同传播距离下的计算结果。计算所采用的参数如下：

$\varepsilon_1=80$，$\varepsilon_T=4$ 及 $\varepsilon_L=2$，高斯脉冲的半宽取 $t_1=1$ 纳秒。

从以上理论推导过程及图 10-3 至图 10-5 的计算结果可以看出，三个电场分量 $t_1\sqrt{\pi}E_{1\rho}(\rho,0;t)$、$t_1\sqrt{\pi}E_{1\varphi}(\rho,\pi/2;t)$和 $t_1\sqrt{\pi}E_{1z}(\rho,0;t)$都包括两个侧面脉冲，这两个侧面脉冲均以 ρ^{-2}的规律递减，并以不同的速度和幅度沿着边界传播。

必须指出的是，与上一节中给出的 δ 源激励的结果不同，由菲涅耳积分引起的项不能抵消 $E_{1\rho}$及 E_{1z}中的 $\rho^{-1/2}$项和 $E_{1\varphi}$中的 $\rho^{-3/2}$项。而对于各向同性情况而言，正如 King 等人的专著[30]中的第 14 章所述，式 (14.8.16)中 $E_{1\varphi}$的菲涅耳积分项由于衰减迅速是可以忽略的。

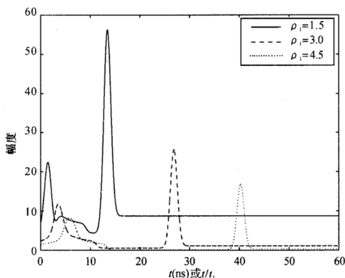


图 10-3　电场分量 $t_1\sqrt{\pi}E_{1\rho}(\rho,0;t)$在几种不同传播距离下的计算结果

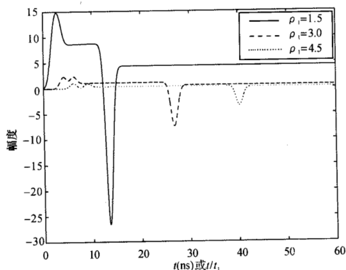


图 10-4　电场分量 $t_1\sqrt{\pi}E_{1\varphi}(\rho,\frac{\pi}{2};t)$在几种不同传播距离下的计算结果

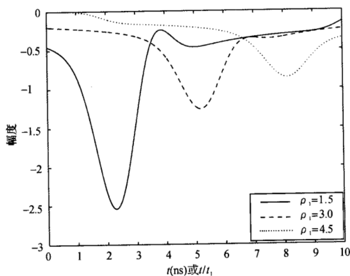


图 10-5　电场分量 $t_1\sqrt{\pi}E_{1z}(\rho,0;t)$在几种不同传播距离下的计算结果

参考文献

[1] J Zenneck. Propagation of plane electromagnetic waves along a plane conducting surface and its bearing on the theory of transmission in wireless telegraphy. *Ann. Phys. (Leipzig)*, Vol. 23, pp. 846 – 866, 1907.

[2] A Sommerfeld. Propagation of waves in wireless telegraphy. *Ann. Phys. (Leipzig)*, Vol. 28, pp. 665 – 737, 1909.

[3] A Sommerfeld. Propagation of waves in wireless telegraphy. *Ann. Phys. (Leipzig)*, Vol. 81, pp. 1135 – 1153, 1926.

[4] A Sommerfeld. *In dia differential und integralgleichungen der meckanik und physik. Vol. II.* P. Frank, R. V. Mises (Eds.), Braunschweig, Germany: F. Vieweg and Son, pp. 932 – 933, 1935.

[5] B Rolf. Graphs to Prof. Sommerfeld's attenuations formulas for radio waves. Proc. IRE, vol. 18, pp. 391 – 402, 1930.

[6] K A Norton. The propagation of radio waves over the surface of the earth and in the upper atmosphere. *Proc. IRE*, Vol. 24, pp. 1367 – 1387, 1936; Vol. 25, pp. 1203 – 1236, 1937.

[7] J R Wait. Propagation of radio waves over a stratified ground. *Geophysics*, Vol. 18, pp. 416 – 422, 1953.

[8] J R Wait. The electromagnetic fields of a horizontal dipole in the presence of a conducting half-space. *Can. J. Phys.*, Vol. 39, pp. 1017 – 1027, 1961.

[9] J R Wait. Electromagnetic surface waves. in *Advanced in Radio Resesarch*, Vol. 1, New York, Academic Press, pp. 157 – 217, 1964.

[10] D A Hill, J R Wait. Excitation of Zenneck surface wave by a vertical aperture. *Radio Sci.* Vol. 13, pp. 969 – 977, 1978.

[11] B Van der Pol, K F Niessen. The propagation of electromagnetic waves over a plane earth. *Ann. Phys.*, Vol. 6, pp. 273 – 294, 1930.

[12] B Van der Pol. Theory of the reflection of light from a point source by a finitely conducting flat mirror: with application to Radiotelegraphy. *Physics*, Vol.

2, pp. 843 - 853, 1935.

[13] G N Watson. The diffraction of radio waves by the earth. *Proc. the Royal Society*, Vol. A95, pp. 83 - 99, 1918.

[14] J R Wait, D A Hill. Excitation of the HF surface wave by vertical and horizontal antennas. *Radio Sci.*, Vol. 14, pp. 767 - 780, 1979.

[15] J R Wait. Radiation and propagation from a vertical antenna over a spherical earth. *Journal of Research of NationalBureau of Standards*, Vol. 56, pp. 237 - 244, 1956.

[16] J R Wait. Low frequency radiation from a horizontal earth. *Can. J. Phys.*, Vol. 34, pp. 586 - 595, 1956.

[17] J R Wait. The transient behavior of the electromagnetic ground wave on a spherical earth. *IRE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. AP-5, pp. 198 - 202, 1957.

[18] J R Wait. On the excitation of electromagnetic surface wave on a curved surface. *IRE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. AP-8, pp. 445 - 449, 1960.

[19] K P Spies, J R Wait. On the calculation of the groundwave attenuation factor at low frequencies. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-14, pp. 515 - 517, 1966.

[20] D A Hill, J R Wait. Ground wave attenuation function for a spherical earth with arbitrary surface impedance. *Radio Sci.*, Vol. 15, No. 3, pp. 637 - 643, 1980.

[21] J R Wait. The ancient and modern history of EM ground - wave propagation. *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, Vol. 40, No. 5, pp. 7 - 24, 1998.

[22] K A North. The calculations of ground-wave field intensity over a finitely conducting spherical earth. *Proc. IRE*, Vol. 29, pages 623 - 639, 1941.

[23] B Van der Pol, H Bremmer. The propagation of radio waves over a finitely conducting spherical earth. *Phil. Mag.*, Vol. 25, pp. 817 - 834, 1938; Further note on above, Vol. 27, pp. 261 - 275, 1939.

[24] H Bremmer. The extension of Sommerfeld's formula for the propagation of radio waves over a flat earth to different conductivities of the soil. *Physica*, Vol. 20, pp. 441 - 460, 1954.

[25] H Bremmer. *Terrestrial Radio Waves*. New York: Elsevier, 1949.

[26] H Bremmer. Applications of operational calculus to groundwave propagation, particularly for long waves. *IRE Trans. Antennas Porpag*, Vol. AP-6, pp. 267 - 274, 1958.

[27] V A Fock. *Electromagnetic diffraction and propagation problems*. Per-

gamon Press, Ltd, Oxford, 1965.

[28] A Jr Banōs. *Dipole radiation in the presence of a conducting half-space*. Oxford:Pergamon Press, 1966.

[29] J R Wait. *Electromagnetic wave in stratified media* (2nd, Ed.). New York: Pergamon Press,1970.

[30] R W P King, M Owens, T T Wu. *Lateral electromagnetic waves, theory and applications to communications, geophysical exploration, and remote sensing*. Springer-Verlag, 1992.

[31] 潘威炎. 长波超长波极长波传播. 成都:电子科技大学出版社,2004.

[32] S S Attwood. Surface wave propagation over a coated plane conductor. *J. Appl. Phys.*, Vol. 22, pp. 504 - 509, 1951.

[33] H M Barlow, A L Cullen. Surface waves. Proc. *IEE (London)*, 100, Part III, pp. 329 - 341, 1953.

[34] L E Vogler. A note on the attenuation function for propagation over a flat layered ground. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-12, pp. 240 - 242. 1964.

[35] R J Lytle, E K Miller, D L Lager. A physical explanation of electro-magnetic surface wave formulas. *Radio Sci*, Vol. 11, pp. 235 - 243, 1976.

[36] Y Rahmat-Samii, R Mittra, P Parhami. Evaluation of Sommerfeld integrals for lossy half-space problems, *Electromagnetics*, Vol. 1, pp. 1 - 28, 1981.

[37] P R Bannister, R L Dube. Simple expressions for horizontal electric dipole quasi-static range subsurface-to-subsurface and subsurface-to-air propagation. *Radio Sci.*, Vol. 13, pp. 501 - 507, 1978.

[38] J M Dunn. *Electromagnetic lateral waves in layered media*. Ph. D Thesis, Harvard Univ. Cambridge, MA, 1984.

[39] J M Dunn. Lateral wave propagation in a three-layered medium. *Radio Sci*, Vol. 21, pp. 787 - 796, 1986.

[40] R J King. EM wave propagation over a constant impedance plane. *Radio Sci.*, Vol. 4, pp. 225 - 268, 1969.

[41] R W P King, T T Wu, L C Shen. The horizontal wire antenna over a conducting or dielectric half-space: current and admittance. *Radio Sci.*, Vol. 9, pp. 701 - 709, 1974.

[42] T T Wu, L C Shen, R W P King. The dipole antenna with eccentric coating in a relatively medium. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-23, pp. 57 - 62, 1975.

[43] R W P King, B H Sandler. Subsurface communication between dipoles in general media, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-25, pp. 770 - 775,

1977.

[44] R W P King, J T deBettencourt, B H Sandler. Lateral-wave propagation of electromagnetic waves in the lithosphere. *IEEE Trans. Geosci. Electron.*, GE-17, pp. 86 – 92, 1979.

[45] R W P King, B H Sandler, L C Shen. A comprehensive study of subsurface propagation from horizontal electric dipoles. *IEEE Trans. Geosci. Remote sensing*, Vol. GE – 18, pp. 225 – 233, 1980.

[46] T T Wu, R W P King. Lateral waves: New formula for $E_{1\varphi}$ and E_{1z}. *Radio Sci.*, Vol. 17, pp. 532 – 538, 1982; Correction, Vol. 19, p. 1422, 1984.

[47] R W P King, T T Wu, Lateral waves: Formulas for the magnetic field. *J. Appl. Phys.*, Vol. 54, pp. 507 – 514, 1983; Erratum, Vol. 56, p. 3365, 1984.

[48] R W P King. New formulas for the electromagnetic field of a vertical electric dipole in a dielectric or conducting half-space near its horizontal interface. *J. Appl. Phys.*, Vol. 53, pp. 8476 – 8482, 1982; Erratum, Vol. 56, p. 3366, 1984.

[49] R W P King. On the reflection of lateral electromagnetic waves form perpendicular boundaries. *J. Appl. Phys.*, Vol. 55, pp. 3916 – 3926, 1984.

[50] M F Brown, R W P King, T T Wu. Experiments on the reflection of lateral electromagnetic waves. *J. Appl. Phys.*, Vol. 55, pp. 3927 – 3933, 1984.

[51] R W P King. Lateral electromagnetic waves along plane boundaries: A summarizing approach. Proc. *IEEE*, Vol. 72, pp. 595 – 611, 1984.

[52] R W P King. Electromagnetic surface waves: New formulas and applications. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-33, pp. 1204 – 1212, 1985.

[53] R W P King. Properties of the lateral electromagnetic field of a vertical dipole and their application. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, Vol. GE-24, pp. 813 – 825, 1986.

[54] R W P King, M Owens, T T Wu. Properties of lateral electromagnetic fields and their application. *Radio Sci.*, Vol. 21, pp. 12 – 23, 1986.

[55] R W P King. Lateral electromagnetic waves from a horizontal antenna for remote sensing in the ocean. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-37, pp. 1250 – 1255, 1989.

[56] R W P King. The electromagnetic field of a horizontal electric dipole in the presence of a three-layered region. *J. Appl. Phys.*, Vol. 69, No. 12, pp. 7987 – 7995, 1991.

[57] R W P King. The electromagnetic field of a horizontal electric dipole in the presence of a three-layered region: Supplement. *J. Appl. Phys.*, Vol. 74, No. 8, pp. 4845 – 4548, 1993.

[58] R W P King. Electromagnetic field of dipoles and patch antennas on microstrip. *Radio Sci.*, Vol. 27, pp. 71 - 78, 1992.

[59] R W P King. Electromagnetic field of a vertical dipole over a imperfect conducting half—space. *Radio Sci.*, Vol. 25, pp. 149 - 160, 1990.

[60] R W P King, S Prasad. *Fundamental electromagnetic theory and application*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1986.

[61] R W P King, G J Fikioris, R B Mack. *Cylindrical antennas and array*. Cambridge, University Press, 2002.

[62] T T Wu, R W P King. Lateral electromagnetic pulses generated by a vertocal dipole on the boundary between two dielectrics. *J. Appl. Phys.*, Vol. 62, pp. 4345 - 4355, 1987.

[63] R W P King. Lateral electromagnetic pulses generated by a vertical dipole on a plane boundary dielectrics. *J. Electrom. Waves Appl.*, Vol. 2, pp. 225 - 243, 1988.

[64] R W P King. The Propagation of signals along a three-layered region: Microstrip. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 36, pp. 1080 - 1086, 1988.

[65] R W P King. Lateral electromagnetic waves and pulses on a open microstrip. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 37, pp. 38 - 47, 1990.

[66] R W P King. Lateral electromagnetic pulses generated on a plane boundary between dielectrics by vertical and horizontal dipole source with Gaussian pluse excitation. *J. Electrom. Waves Appl.*, Vol. 2, pp. 589 - 597, 1989.

[67] R W P King, S S Sandler. The electromagnetic field of a vertical electric dipole in the presence of a three-layered region. *Radio Sci.*, Vol. 29, No. 1, pp. 97 - 113, 1994.

[68] J R Wait. Comment on "The electromagnetic field of a vertical electric dipole in the presence of a three-layered region" by Ronold W. P. King and Sheldon S. Sandler. *Radio Sci.*, Vol. 33, No. 2, pp. 251 - 253, 1998.

[69] R W P King, S S Sandler. Reply. *Radio Sci.*, Vol. 33, No. 2, pp. 255 - 256, 1998.

[70] S F Mahmoud. Remarks on "The electromagnetic field of a vertical electric dipole over the earth or Sea". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 46, No. 12, pp. 1745 - 1946, 1999.

[71] R E Collin. Some observations about the near zone electric field of a hertzian dipole above a lossy earth. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 52, No. 11, pp. 3133 - 3137, 2004.

[72] R E Collin. Hertzian dipole radiation over a lossy earth or sea: some early

and late 20th century controversies. *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, Vol. 46, No. 2, pp. 64 - 79, 2004.

[73] V A Houdzoumis. Vertical electric dipole radiation over a sphere: character of the waves that propagate through the sphere. *J. Appl. Phys.*, Vol. 86, pp. 3939 - 3942, 1999.

[74] V A Houdzoumis. Two modes of wave propagation manifested in vertical electric dipole radiation over a sphere. *Radio Sci.*, Vol. 35, No. 1, pp. 19 - 29, 2000.

[75] D Margetis. Radiation of horizontal electric dipole on large dielectric sphere. *J. Math. Phys.*, Vol. 43, pp. 3162 - 3201, 2002.

[76] D Margetis, T T Wu. Exactly calculable field components of electric dipoles in planar boundary. *J. Math. Phys.*, Vol. 42, 713 - 745, 2001.

[77] B Van der Pol. On discontinuous electromagnetic waves and occurrrnce of a surface wave. *IRE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. AP-4, pp. 288 - 293, 1956.

[78] H J Frankena. Transient phenomena associated with Sommerfield's horizontal dipole problem. *Applied Scientific Research*, Section B, Vol. 8, pp. 357 - 368, 1960.

[79] A T De Hoop, H J Frankena. Radiation of pulses generated by a vertical electric dipole above a plane, non-conducting earth. *Applied Scientific Research, Section B*, Vol. 8, pp. 369 - 377, 1960.

[80] J A Kong. Dispersion analysis of reflection and transmission by plane boundary—a graphical approach. *Am. J. Phys.*, Vol. 43, pp. 73 - 76, 1975.

[81] A Ezzeddine, J A Kong, L Tsang. Time response of a vertical electric dipole over a two-layer medium by the double deformation technique. *J. Appl. Phys.*, vol. 53, No. 2, pp. 813 - 822, 1981.

[82] A Ezzeddine, J A Kong, L Tsang. Transient fields of a vertical electric dipole over a two-layer nondispersive dielectric. *J. Appl. Phys.*, Vol. 53, No. 3, pp. 1202 - 1208, 1981.

[83] K I Nikoskinen. Time-domain analysis of horizontal dipoles in front of planar dielectric interface. *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. 38, No. 12, pp. 1951 - 1957, 1990.

[84] R Dai, C T Young. Transient fields of a horizontal electric dipole on multilayered dielectric medium. *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. 45, No. 6, pp. 1023 - 1031, 1997.

[85] R Cicchetti. Transient analysis of radiated field from electric dipoles and

microstrip lines. *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. 39, No. 7, pp. 910-918, 1991.

[86] M Y Xia, C H Chan, Y Xu, W C Chew. Time-domain Green's functions for microstrip structures using the Cagniard-de Hoop method. *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. 52, No. 6, pp. 1578-1585, 2004.

[87] C L Pekeris. The seismic surface pulse. *Proceeedings of the National Academy of Sciences (USA)*, Vol. 41, No. 7, pp. 469-480, 1955.

[88] W Y Pan. Surface wave propagation along the boundary between sea water and one-dimensionally anisotropic rock. *J. Appl. Phys.*, Vol. 58, pp. 3963-3974, 1985.

[89] 张红旗.沿涂敷介质层的导电基底传播的表面波与侧面波.中国科学院博士学位论文,2001.

[90] H-Q Zhang, W-Y Pan. Electromagnetic field of a vertical electric dipole on a perfect conductor coated with a dielectric layer. *Radio Sci.*, Vol. 37, dio: 101029/ 2000RS002348, 2002.

[91] H-Q Zhang, K Li, W-Y Pan. The electromagnetic field of a vertical dipole on the dielectric-coated imperfect conductor. *J. Electrom. Waves Appl.*, Vol. 18, No. 10, pp. 1305-1320, 2004.

[92] L Liu, K Li. Radiation from a vertical electric dipole in the presence of a three-layered region. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 55, No. 12, pp. 3469-3475, 2007.

[93] 张红旗,潘威炎,沈凯先. 水平电偶极子在涂敷介质层的导电基底上激起的电磁场. 电波科学学报,2001,16(3).

[94] H-Q Zhang, W-Y Pan, K Li, K-X Shen. Electromagnetic field for a horizontal electric dipole buried inside a dielectric layer coated high lossy half dpace. *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 50, pp. 163-186, EMW Publishing, Cambridge, Boston, 2005.

[95] L Liu, K Li, Y H Xu. Radiation of a horizontal dipole in a three—Layered region and microstrip antenna. *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 86, pp. 87-110. EMW Publishing, Cambridge, Boston, 2008.

[96] K Li, Y Lu. Electromagnetic field generated by a horizontal electric dipole near the surface of a planar perfect conductor coated with a uniaxial layer. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 53, pp. 3191-3200, 2005.

[97] J P Mei, K Li. Electromagnetic field from a horizontal electric dipole on the surface of a high lossy dielectric coated with a uniaxial layer. *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 73, pp. 71-91, EMW Publishing, Cambridge, Bos-

ton, 2007.

[98] Y H Xu, W Ren, L Liu, K Li. Trapped surface wave and lateral wave in the presence of a four — layered region. *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 82,271 - 285. EMW Publishing, Cambridge, Boston, 2008.

[99] Y H Xu, K Li, L Liu. The electromagnetic field generated by a horizontal electric dipole in in the presence of a four-layered region. *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 81, 371 - 391. EMW Publishing, Cambridge, Boston, 2008.

[100] W -Y Pan, K Li, H Q Zhang. Lateral-wave electromagnetic field generated by a horizontal electric dipole below the spherical-earth surface. *J. Electrom. Waves Appl.*, Vol. 19, No. 7, pp. 953 - 972, 2005.

[101] W Y Pan, H Q Zhang. Electromagnetic field of a vertical electric dipole on the spherical conductor covered with a dielectric layer. *Radio Sci.*, Vol. 38, No. 3, dio: 10. 1029/2002RS2689,2003.

[102] K Li, S -O Park, H -Q Zhang. Electromagnetic field in the presence of a three-layered spherical region. *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 45, pp. 103 - 121. EMW Publishing, Cambridge, Boston, 2004.

[103] K Li, S -O Park. Electromagnetic field in the air generated by a horizontal electric dipole located in the spherical electrically earth coated with a dielectric layer. *J. Electrom. Waves Appl.*, Vol. 17, No. 10, pp. 1399 - 1417, 2003.

[104] K Li, S -O Park, H -Q Zhang. The electromagnetic field over the spherical earth coated with N-layered dielectric. *Radio Sci.*, Vol. 39, RS2008, doi:10. 1029/2002RS002771, 2004.

[105] K Li, Y Lu. Electromagnetic Field from a Horizontal Electric Dipole in the spherical electrically earth coated with N-layered dielectrics. *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 54, pp. 221 - 244. EMW Publishing, Cambridge, Boston, 2005.

[106] K Li, Y Lu, W -Y Pan. Exact formulas for the lateral electromagnetic pulses generated by a horizontal electric dipole on the boundary of two dielectrics. *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 55, pp. 249 - 283. EMW Publishing, Cambridge, Boston, 2005.

[107] K Li, Y Lu, W -Y Pan. Exact transient field of a horizontal electric dipole excited by a Gaussian pulse on the boundary between two dielectrics. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, Vol. 4, pp. 337 - 340, 2005.

[108] K Li, Y Lu. Exact formulas for the lateral electromagnetic pulses generated by a horizontal electric dipole in the boundary between a isotropic medium and one-dimensionally anisotropic medium. *Progress In Electromagnetics Research*,

PIER 60, pp. 43 - 83. EMW Publishing, Cambridge, Boston, 2006.

[109] K Li, Y Lu, M Li. Approximate formulas for lateral electromagnetic pulses from a horizontal electric dipole on the surface of one-dimensionally anisotropic medium. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 53, No. 3, pp. 933 - 937, 2005.

[110] Y H Xu, K Li, W Ren. The approximate transient field of a horizontal electric dipole excited by a Gaussian pulse on the boundary between a homogeneous isotropic medium and one-dimensionally anisotropic medium. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, Vol. 6, pp. 427 - 431, 2007.

[111] K Li. Electromagnetic fields in stratified media, Zhejiang University Press, Hangzhou and Springer-Verlage GmbH, Berlin Heidelberg, 2009.

[112] L B Felsen, N Marvuvitz. *Radiation and scattering of waves*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1973.

[113] J A Kong. *Electromagnetic wave theory*. EMW Publishing, Cambridge: Massachusetts, USA, 2005.

[114] J R Wait. *Wave propagation theory*. New York: Pergamon Press, 1981.

[115] A Ishimaru. *Electromagnetic wave propagation, radiation and scattering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.

[116] W C Chew. *Waves and fields in inhomgeneous media*. New York, Van Nostrand Reinhold, 1990. 聂在平,柳清伙译. 非均匀介质中的场与波. 北京:电子工业出版社,1992.

[117] 金亚秋等. 复杂系统中的电磁波. 上海:复旦大学出版社,1994.

[118] 熊皓等. 无线电波传播. 北京:电子工业出版社,1998.

[119] 陈抗生. 电磁场和电磁波. 北京:高等教育出版社,2003.

[120] M Abamowitz, I A Stegun. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications, 1972.

[121] I S Gradshteyn, I M Ryzhik. *Table of integrals, series and products*. Academic Press, 1980.

[122] R K Hoffman. *Handbook of microwave integrated circuits*, Sec. 3. 2. Artech House, Norwood, 1987.

[123] 南京工学院数学教研组. 特殊函数简明教程(第二版). 北京:高等教育出版社,1982.

[124] 郭敦仁. 数学物理方法. 北京:人民教育出版社,1965.